Introdução à Teoria dos Números
Aula de Problemas 4.

1. Ao tentar formar grupos de trabalho numa turma, conclui-se que se os grupos tiverem 3 elementos ficam dois alunos de fora, se tiverem quatro fica 1 de fora, mas que se consegue formar grupos de 5 elementos desde que o professor faça parte de um deles. Quantos alunos terá a turma?

2. Determinar 3 inteiros consecutivos tais que um é divisível pelo quadrado de um primo, outro é divisível pelo cubo de um primo e o terceiro é divisível pela quarta potência de um primo.

3. Mostrar que, dados inteiros positivos m_1 e m_2, o sistema

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod m_1 \\ x \equiv a_2 \mod m_2 \end{cases}$$

tem solução se e só se $a_1 \equiv a_2 \mod mdc(m_1, m_2)$, e que nesse caso a solução é única módulo $mmc(m_1, m_2)$.

4. Determinar, usando o Teorema Chinês dos Restos, as soluções, se existirem, das equações

$$507x \equiv 312 \mod 3025$$

$$264x \equiv 31 \mod 1573$$

$$732x \equiv 84 \mod 504$$

5. Determinar directamente as soluções de

$$x^3 + 2x - 3 \equiv 0 \mod 5$$

e de

$$x^3 + 2x - 3 \equiv 0 \mod 9$$

e usar as soluções encontradas para determinar as de

$$x^3 + 2x - 3 \equiv 0 \mod 45$$

6. Sabendo que $1144 = 8 \times 11 \times 13$, determinar, ou mostrar que não existem, as soluções das congruências seguintes

   a) $68x \equiv 28 \mod 1144$

   b) $24x \equiv 44 \mod 1144$

7. a) Determinar os pares de inteiros consecutivos tais que a sua soma é divisível por 9 e o seu produto é divisível por 11.

   b) Determinar o primeiro par de inteiros positivos ímpares consecutivos em que o menor deles é múltiplo de 17 e o maior é múltiplo de 11.

8. Determinar os dígitos das unidades e das dezenas de 7^{27}.