1 Números Naturais

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e as suas propriedades mais elementares são familiares a todos:

1. Está definida uma operação de soma $a + b \in \mathbb{N}$.
2. Está definida uma operação de produto $a \times b = a.b = ab \in \mathbb{N}$.
3. $a + b = b + a$.
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
5. $a + b = a + c \implies b = c$.
6. $ab = ba$.
7. $(ab) c = a (bc)$.
8. $\exists 0 \in \mathbb{N} : a + 0 = a \, \forall a \in \mathbb{N}$.
9. $\exists 1 \in \mathbb{N} : n1 = n, \forall n \in \mathbb{N}$.
10. $ac = bc \wedge c \neq 0 \implies a = b$.
11. $a (b + c) = ab + ac$.

Definição 1.1 $a \leq b \iff \exists n \in \mathbb{N} : a + n = b$.

Usamos a notação $a < b$ com o significado $a \leq b \wedge a \neq b$ ou, de forma equivalente, $a < b \iff \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : a + n = b.$.

A relação $\leq$ é evidentemente uma relação de ordem mas satisfaz além disso uma outra condição, que é mais uma das propriedades fundamentais de $\mathbb{N}$:

12. Se $a, b \in \mathbb{N}$ então verifica-se uma e uma só das condições

$$a < b,\ b < a,\ a = b.$$

Além disso,

$$a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$$

Uma relação de ordem com esta propriedade chama-se uma **relação de ordem total**.

Temos finalmente:

13. *(Boa Ordenação):* Se $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$, então X tem um *primeiro elemento*, isto é

$$\exists x_0 \in X : x < x_0 \implies x \notin X$$

Note-se que, por exemplo, o conjunto dos racionais não negativos satisfaz todas as propriedades $1 - 12$ mas não a 13.

Estas propriedades caracterizam completamente o conjunto dos números naturais, isto é, qualquer conjunto que as satisfaça é uma "cópia" de $\mathbb{N}$, sendo que a propriedade de Boa Ordenação é a crucial.
Veremos mais adiante que esta propriedade tem como consequência

13*. Se $X \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

  i. $n_0 \in X$,

  ii. $x \in X \implies x + 1 \in X$,

  então $X = \mathbb{N}$

Nota 1.2 *É de facto possível definir o conjunto dos naturais do seguinte modo: $\mathbb{N}$ é um conjunto satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *Existe um elemento $0 \in \mathbb{N}$;*
2. *Existe uma função (a função sucessor) injectiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$;*
3. *Para qualquer subconjunto $C \subset \mathbb{N}$, se*

   i. $0 \in C$,

ii. $\forall x \in \mathbb{N}\ x \in C \implies s(x) \in C$,

então $C = \mathbb{N}$.

A partir destas propriedades, que se tomam como axiomas, podem deduzir-se a existência das operações de soma e produto com todas as propriedades descritas atrás.

Notação 1.3 *Usaremos a notação*

$$[m] = \{x \in \mathbb{N} : x < m\} = \{0, \cdots, m-1\}$$

Com esta notação $[0] = \emptyset$.

Nota 1.4 *De facto, nesta notação está presente uma ideia importante, a saber, a de que poderíamos definir o conjunto dos naturais a partir de noções elementares da teoria de conjuntos, pondo* $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, *e assim por diante.*

1.1 Números Inteiros

Ainda que os números naturais sejam suficientes quando se trata de *contar* ou *ordenar* os elementos de conjuntos suficientemente simples, a necessidade de comparar números entre si e de realizar e compreender com clareza as operações aritméticas, conduz naturalmente à introdução do conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n, \cdots\}$$

$\mathbb{Z}$ satisfaz as propriedades 1-12 e fica completamente caracterizado se estabelecermos além disso que

- $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists^1 (-a) \in \mathbb{Z} : a + (-a) = 0$
- $\forall a \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N} \vee -a \in \mathbb{N}$

Evidentemente, $\mathbb{Z}$ não satisfaz a propriedade 13 (Princípio da Boa Ordenação). Mas para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, o conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq a\}$ já tem essa propriedade.

Os axiomas dos inteiros têm como consequência todas as propriedades bem conhecidas de que destacamos as seguintes

1. $0 \cdot a = 0, \forall a \in \mathbb{Z}$
2. $ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$
3. $(-a)(-b) = ab$

O estudo mais aprofundado da aritmética dos inteiros será iniciado mais adiante.

Nota 1.5 *Em vez de o definirmos de forma axiomática, o conjunto $\mathbb{Z}$ pode ser* construído *a partir do conjunto dos naturais da seguinte forma:*
Considere-se o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dos pares ordenados de números naturais, onde definimos a relação $\mathcal{R}$ seguinte:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Chamemos conjunto dos inteiros ao conjunto das classes de equivalência de $\mathcal{R}$. Portanto, de acordo com esta definição, um inteiro pode ser representado por um par $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mas também por qualquer outro par (c, d) tal que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$.
Esta definição, aparentemente artificial, ganha sentido quando pensamos, como se referiu acima, nos inteiros como o resultado de comparar naturais: o par (a, b) corresponde ao inteiro (no sentido habitual) $b - a$. Note-se que esta operação de subtracção, não está bem definida para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, mas apenas quando $a < b$. Assim, a relação de equivalência $\mathcal{R}$ limita-se a exprimir, na linguagem dos naturais, que $b - a = d - c$ e que portanto ambos os pares (a, b) e (c, d) definem a mesma diferença de naturais.
Um par (a, b) representa um natural se $a < b$; o inteiro 0 é representado por qualquer par da forma (a, a); o simétrico do inteiro representado por (a, b) é representado por (b, a).
Resta verificar como se devem definir as operações de soma e produto e a relação de ordem, o que se torna claro se seguimos a interpretação feita de identificar (a, b) com $b - a$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

já que

$$(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Do mesmo modo, como

$$(b-a)(d-c) = bd + ac - bc - ad = (bd + ac) - (ad + bc),$$

definimos o produto

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ad + bc, bd + ac)$$

onde as somas e produtos em cada entrada do par ordenado são as já definidas para os naturais.
E, seguindo a mesma ideia,

$$(a,b) < (c,d) \Leftrightarrow b + c < a + d.$$

O passo final, mas fundamental, desta construção reside em verificar que a definição das operações e da relação de ordem não dependem dos representantes escolhidos: temos de facto que recordar que nesta construção um inteiro não é um par de naturais mas sim uma classe de equivalência desses pares. É necessário portanto garantir que se

$$(a,b)\mathcal{R}(a',b'), \qquad (c,d)\mathcal{R}(c',d')$$

se obtém o mesmo inteiro na soma $(a,b)+(c,d)$ *que na soma* $(a',b')+(c',d')$*, e o mesmo para o produto ou para a relação de ordem. Fazemos essa verificação para a soma, deixando as outras como um exercício. Dizer que estas duas somas representam o mesmo inteiro é o mesmo que dizer que*

$$((a,b)+(c,d))\mathcal{R}((a',b')+(c',d'));$$

mas, de acordo com a definição de soma a que chegámos anteriormente, isso equivale a

$$(a+c, b+d)\mathcal{R}(a'+c', b'+d')$$

ou seja

$$a + c + b' + d' = b + d + a' + c';$$

ora, como por hipótese

$$(a,b)\mathcal{R}(a',b'), \qquad (c,d)\mathcal{R}(c',d'),$$

temos

$$a + b' = b + a' \qquad c + d' = d + c'$$

e a igualdade anterior resulta como consequência das propriedades da soma de naturais.

Um raciocínio semelhante permite construir o conjunto dos racionais e as suas propriedades, a partir de $\mathbb{Z}$*. Encontraremos mais adiante uma outra situação em que definimos operações entre classes de equivalência a partir de operações nos inteiros.*

2 Princípio de Indução Finita

Como foi já referido, uma consequência importante do Princípio da Boa Ordenação é o seguinte

Teorema 2.1 *Se $X \subset \mathbb{N}$ satisfaz as condições*

$$\begin{aligned} \textbf{(i)} &: k_0 \in X, \\ \textbf{(ii)} &: k \geq k_0, k \in X \implies k+1 \in X, \end{aligned}$$

então

$$X \supset \mathbb{N} \setminus [k_0].$$

Demonstração 2.2 *De facto, se o conjunto $Y = \{x \in \mathbb{N} | x \geq k_0 \wedge x \notin X\}$ não for vazio, tem que ter, pelo Princípio da Boa Ordenação, um primeiro elemento, chamemos-lhe a. Como $k_0 \in X$, tem-se $k_0 < a$ e portanto $k_0 \leq a-1$; por outro lado $a-1 \in X$ uma vez que a é o primeiro elemento do conjunto Y definido atrás.*
Mas a condição ii) do teorema implica então que $a \in X$, uma contradição. Esta contradição decorre de supormos que $Y \neq \emptyset$.

Nota 2.3 *O teorema anterior é de facto logicamente equivalente ao Princípio da Boa Ordenação: vamos assumir que $\mathbb{N}$ tem a propriedade descrita no teorema e seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto não vazio; queremos mostrar que X tem um primeiro elemento, ou seja, usando a notação entretanto introduzida, queremos provar que existe $x \in X$ tal que $[x] \subset \mathbb{N} \setminus X$.*
Consideremos o conjunto $C \subset \mathbb{N}$ definido por $C = \{n \in \mathbb{N} : [n] \subset \mathbb{N} \setminus X\}$; temos que $0 \in C$ por definição, mas, como $X \neq \emptyset$, $C \neq \mathbb{N}$, logo terá que existir algum $m \in C$ tal que $m+1 \notin C$; mas isso significa que $[m] \subset \mathbb{N} \setminus X$ enquanto que $[m+1] \not\subseteq \mathbb{N} \setminus X$; como $[m+1] = [m] \cup \{m\}$, deduzimos que $m \in X$ e como $[m] \subset \mathbb{N} \setminus X$, m é o primeiro elemento de X.

Este teorema é frequentemente usado da seguinte forma:

2.4 *Princípio de Indução Finita: Se $P(n)$ é uma dada afirmação referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :*

i: $P(k_0)$ é verdadeira;

ii: se $k \geq k_0$ e $P(k)$ é verdadeira então $P(k+1)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq k_0$.

Exemplo 2.5 *Ilustramos a aplicação do Princípio de Indução Finita através de um exemplo simples: provar por indução que a igualdade*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

se verifica para todo o $n \geq 1$.
Começamos por verificar que a igualdade se verifica para $n = 1$, o que é imediato.
Em seguida mostramos que, se a igualdade se verificar para um certo natural n então também se verifica para $n+1$: de facto, se

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

então

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ou seja a igualdade é igualmente válida para $n+1$ como queríamos mostrar. O passo essencial na dedução feita está na segunda igualdade, onde usamos a hipótese de que a igualdade se verifica para n para substituir o somatório $\sum_{k=1}^{n} k$ por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo 2.6 *Dado $r \neq 1$, provar por indução a fórmula para a soma dos termos de uma progressão geométrica com primeiro termo 1 e razão r:*

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \; \forall n \geq 0$$

Mais uma vez, a igualdade é obviamente verdadeira para $n = 0$; de modo semelhante ao do exemplo anterior, se a fórmula é verdadeira para um natural n então, para $n + 1$ temos

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} =$$
$$\frac{1 - r^{n+1} + (1 - r)r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$

ou seja, a fórmula verifica-se também para $n + 1$.

Ainda como um terceiro exemplo (que tem a particularidade de ter sido a primeira exposição escrita, pelo matemático francês Pascal, da aplicação do Princípio de Indução Finita), provamos a chamada:

Proposição 2.7 ***Fórmula do Binómio***

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ ou mais precisamente $n! = \Pi_{j=1}^{n} j$ (por convenção $0! = 1$).

Demonstração 2.8 *Para simplificar a nossa dedução, convém alargar a definição dos números binomiais* $\binom{n}{k}$ *a todos os valores inteiros de* k*:*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & se\ 0 \leq k \leq n \\ \\ 0 & se\ k < 0 \vee n < k \end{cases}$$

Esta generalização permite reescrever a fórmula como

$$(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

onde o símbolo $\sum_k$ *significa que o índice* k *toma todos os valores inteiros: esta soma de "um número infinito" de termos é definida como a soma dos termos não nulos.*
Mais uma vez os casos $n = 0$ *ou* $n = 1$ *são de verificação imediata; a demonstração de que a validade da fórmula para um certo* n *implica a sua validade para* $n+1$ *é um pouco mais complicada que a dos exemplos anteriores e faz-se do seguinte modo: supondo então que*

$$(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

temos

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_k \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

fazendo $j = k+1$ *no primeiro somatório,*

$$= \sum_j \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

designando de novo por k o índice do primeiro somatório,

$$= \sum_k \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

$$\sum_k \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} = \sum_k \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

onde a última igualdade é justificada por

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$\frac{n!k}{k!(n+1-k)!} + \frac{n!(n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

que é a conhecida propriedade do triângulo de Pascal (fica só por comprovar a igualdade nos casos $k < 1$ e $k > n$, o que é simples).

Nota 2.9 *os exemplos anteriores, além de servirem de ilustração da aplicação do Princípio de Indução Finita, são importantes pelos resultados em si, que são igualdades, principalmente as duas últimas, que devem ser conhecidas.*

Antes de dar outro exemplo convém desde já fazer algumas observações:

- É muito natural perguntar "de onde vem" a fórmula que é enunciada para provar. Ou seja, aparentemente, para provar uma certa proposição através do Princípio de Indução Finita, é preciso saber já o que se vai provar.
  Em muitos casos o resultado a provar é sugerido por cálculos em casos particulares ou por um raciocínio menos rigoroso. O Princípio de Indução Finita serve então para comprovar a conjectura formulada.
  Mas é verdade que muitos dos resultados que provamos por aplicação do Princípio de Indução Finita podem ser provados com outras abordagens. Um exemplo disso é a dedução da igualdade do primeiro exemplo apresentada num exercício.

- O Princípio de Indução Finita é por vezes mal entendido como um mero artifício formal; a necessidade de provar

$$P\,(k)\,\text{é verdadeira} \implies P\,(k+1)\,\text{é verdadeira}$$

para finalmente concluir que $P(k)$ é verdadeira (para todo o $k \geq k_0$, claro) pode criar a ideia errada de que estamos a admitir antecipadamente o resultado que queremos provar.
Na verdade, o que se prova naquele passo é a implicação. Como se sabe, o facto de uma implicação $a \implies b$ entre duas proposições ser verdadeira significa apenas que *se* a for verdadeira então b é verdadeira: formalmente o valor lógico de $a \implies b$ é o mesmo de $(\neg a) \vee b$, onde $\neg$ significa negação, e esta proposição só é falsa se a for verdadeira e b falsa.
É por isso que a prova da implicação tem que ser acompanhada pela verificação de que $P(k_0)$ é verdadeira. Uma boa maneira de compreender isso é através do seguinte exemplo: suponhamos que, devido a uma gralha, o primeiro exemplo acima é enunciado assim: provar por indução que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n+1}{2}\ \forall n \geq 1;$$

se assumirmos que a igualdade é verdadeira para um certo n então temos, para $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) =$$
$$= \frac{n^2+n+1}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+1+2(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{n^2+3n+3}{2} = \frac{(n^2+2n+1)+n+2}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2};$$

provámos portanto que *se* a igualdade se verifica para n também se verifica para $n+1$, ou seja, verificámos a segunda condição para a aplicação do Princípio de Indução Finita. No entanto, aquela igualdade é obviamente falsa.

Exercícios I.5

1. "Adivinhar", calculando os primeiros casos, uma fórmula para cada uma das seguintes somas e demonstrá-las :

   a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)\,;$

   b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3;$

2. Determinar experimentalmente uma relação de recorrência satisfeita pelo número máximo (que designamos R_n) de regiões definidas por n rectas no plano. Obter uma fórmula fechada para R_n e demonstrar a sua validade.

3. Analisar a seguinte dedução da fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

   justificando cada um dos passos:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

   Portanto

$$2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)^2 - (n+1) = n(n+1)$$

   Determinar, usando o mesmo método, uma fórmula fechada para a soma:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2.$$

4. *(Números de Fibonacci)* Considerar a sucessão de inteiros definida por recorrência por

$$F_1 = 1; F_2 = 1;$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n > 2.$$

F_n é chamado o $n-$ésimo número de Fibonacci.

a) Provar que

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

b) "Adivinhar" e demonstrar identidades para as seguintes expressões:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = ???; \qquad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = ???$$

5. O jogo das Torres de Hanoi consiste no seguinte: existem três casas e uma pilha de n discos, de tamanhos decrescentes da base para o topo, na primeira casa; pretende-se mover a pilha para a terceira casa, cumprindo as seguintes regras: só se pode mover um disco de cada vez; não se podem colocar discos maiores sobre discos menores.
   Qual é o menor número de movimentos (dependente de n, claro) necessário para terminar o jogo?

6. Demonstrar que, para todo o $n \geq 1$,

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

7. Consegue provar por indução em n que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad \frac{1}{2}\frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \ ?$$

   E se fôr

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad \frac{1}{2}\frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \ ?$$

8. Demonstrar que, para todo o $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{7}{4} - \frac{1}{n}.$$

9. Mostrar que é possível colorir com duas cores as regiões planas definidas por n circunferências, de modo a que regiões com um arco de fronteira comum tenham cores diferentes.

10. Mostrar que, dados n quadrados, é possível recortá-los em polígonos de modo a formar com estes um novo quadrado.
Sugestão: O único caso difícil é $n = 2$.

11. $\mathbb{N}^k$ é o produto cartesiano de k cópias de $\mathbb{N}$, ou seja,

$$\mathbb{N}^k = \{(x_1, \cdots, x_k) : x_i \in \mathbb{N}\ \forall 1 \leq i \leq k\}.$$

Mostrar que, para todo o $k \geq 1$, existe uma bijecção entre $\mathbb{N}^k$ e $\mathbb{N}$.

12. a) Provar por indução que, para todo o $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)};$$

b) Deduzir (sem usar indução) uma fórmula semelhante para a soma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+p)}$ onde p é um inteiro positivo .
Sugestão: $\frac{1}{k(k+p)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right)$.

13. Demonstrar que se $-1 < a_i < 0$, para todo o $1 \leq i \leq n$, então

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

14. Demonstrar, por indução em n, que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (b_i > 0\ \forall i \leq n \wedge \prod_{i=1}^{n} b_i = 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i \geq n$$

Nota: $\prod_{i=1}^{n} b_i$ designa o produto dos b_i, com $1 \leq i \leq n$.
Sugestão: Se $b_i = 1 \forall i$, o resultado é evidente; caso contrário, notar que se $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{n+1}$ são $n+1$ reais positivos tais que $\prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$, então $b_1 b_2, b_3, \cdots, b_{n+1}$ são n reais positivos cujo produto é 1; podemos supôr além disso que, por exemplo, $b_1 < 1 < b_2$; mostrar que se $0 < a < 1 < b$, então $ab < a + b - 1$.

15. Usar o resultado do problema anterior para demonstrar o seguinte: dados n números reais positivos $a_i,\ 1 \leq i \leq n$, verificam-se as desigualdades

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ou seja, usando a notação para somatórios e produtos,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leq \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i}{n}$$

As fórmulas acima representam, respectivamente, as médias harmónica, geométrica e aritmética dos números $a_i,\ 1 \leq i \leq n$.

16. Usar as desigualdades do exercício anterior para provar

   a) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} > \frac{2}{3}\ \forall n \geq 1$;
   b) $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{n+k} > 1\ \forall n \geq 1$;

Uma outra forma equivalente e por vezes de aplicação mais directa do Princípio de Indução Finita é a seguinte:

2.10 *Princípio de Indução Finita ("FORTE"):*
Se $P(n)$ é uma dada afirmação referente aos números naturais $n \in \mathbb{N}$ tal que :

i : $P(k_0)$ é verdadeira;

ii : $k \geq k_0$ e $P(k_0), P(k_0+1), \ldots, P(k)$ verdadeiras, implica que $P(k+1)$ é verdadeira;

então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq k_0$.

O argumento da demonstrção da equivalência dos dois resultados é resumidamente este: O Princípio de Indução Finita ("FORTE") implica o Princípio de Indução Finita, uma vez que se $P(k) \implies P(k+1)$ então também

$$P(k_0) \wedge P(k_0+1) \wedge \cdots \wedge P(k) \implies P(k+1);$$

portanto, se as condições do Princípio de Indução Finita estão satisfeitas também as do Princípio de Indução Finita ("FORTE") o estão.
Mas reciprocamente o Princípio de Indução Finita implica o Princípio de Indução Finita ("FORTE"): aplicar este último a $P(k)$ é o mesmo que aplicar o Princípio de Indução Finita a $Q(k) \Leftrightarrow P(k_0) \wedge \cdots \wedge P(k)$.

Exemplo 2.11 *Como aplicação desta forma do princípio considere-se o seguinte exemplo: seja x_n a sucessão definida pela seguinte* recorrência

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1; \qquad x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}\, \forall n > 1$$

Calculando $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, somos naturalmente levados a conjecturar que se tem $x_n = n$ para todo o $n \geq 0$. Como o termo de ordem $n+1$ é definido à custa dos dois termos anteriores, é mais fácil fazer a demonstração através do Princípio de Indução Finita ("FORTE"): o caso $n = 0$ é estabelecido pela própria definição da sucessão; supondo agora que $x_k = k$ para todo o $k \leq n$, concluímos facilmente que temos

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} = 2n - (n-1) = n+1$$

Exercício 2.12 *Usar o Princípio de Indução Forte para demonstrar que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é $(n-2)\pi$.*

Nota 2.13 (Definições por recorrência) *A ideia da definição recursiva de uma sucessão, em que cada termo é definido em função de um ou mais termos anteriores, foi já referida informalmente e é de grande importância.*
Uma sucessão com termos num conjunto X não é mais do que uma função $f : \mathbb{N} \to X$, usualmente apresentada na forma $f(n) = x_n$; quando definimos a recursão $x_{n+1} = F(x_n)$, ou seja, $f(n+1) = F(f(n))$, com um certo valor inicial x_0, deve notar-se que, logicamente, estamos a admitir já a existência da função que queremos definir.
Uma dedução mais rigorosa da existência dessas funções pode ser feita do seguinte modo: seja $F : X \to X$ uma função qualquer e $x_0 \in X$. Provamos por indução que para todo o $n > 0$ existe uma única função $f_n : [n] \to X$ satisfazendo as propriedades

- $f_n(0) = x_0$;
- $f_n(k+1) = F(f_n(k))\ \forall k < n-1$.

Fica claro que se $n < m$ a função f_n é a restrição de f_m a $[n]$. Definimos então $f : \mathbb{N} \to X$ pela igualdade $f(n) = f_m(n)$ para qualquer $m > n$; se virmos cada função como uma relação, isto é, como um conjunto de pares ordenados $(k, f_n(k)) \in \mathbb{N} \times X$, podemos simplesmente dizer que definimos f como sendo a união das f_n; prova-se então que f é a única função com domínio $\mathbb{N}$ e contradomínio X que satisfaz aquelas propriedades, ou seja, temos o teorema seguinte:

Teorema *2.14* *(Teorema da Recursão Finita)* *Seja X um conjunto, $x_0 \in X$, e $F : X \to X$ uma função. Então existe uma única função $f : \mathbb{N} \to X$ tal que*

- $f(0) = x_0$;
- $f(n+1) = F(f(n))\ \forall n \in \mathbb{N}$.