Conjuntos

Um conjunto é caracterizado pelos seus elementos.
Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
&\{2,4,6\} = \\
&\{x : x < 8 \land \exists z \in \mathbb{N} : x = 2z\} = \\
&\{x : x \in \mathbb{R} \land x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0\}
\end{aligned}
$$

Operações

- O conjunto vazio $\emptyset$ é caracterizado por $\forall x \ : \ x \notin \emptyset$
- $X \cup Y = \{x : x \in X \vee x \in Y\}$
- $X \cap Y = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$
- $X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\}$
- $X \subset Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$.
  Se $Y \subset X$ mas $Y \neq X$ escrevemos $Y \subsetneq X$.
- Quando um conjunto A é subconjunto de um conjunto fixo U, denotamos $U \setminus A$, o complementar de A, por A^c ou por $\overline{A}$

Propriedades

- A união e intersecção são operações comutativas e associativas

$$X \cap Y = Y \cap X, \quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z;$$

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z;$$

e distributivas uma sobre a outra

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

- **Leis de Morgan**: dados subconjuntos A e B de X,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \text{ e } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Duas Construções Importantes

Conjunto das partes de um conjunto:

$$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subset X\}$$

Produto cartesiano de dois conjuntos:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

Funções

Uma função $f : X \to Y$ é uma correspondência unívoca entre os elementos do conjunto X (o domínio ou conjunto de partida) e elementos do conjunto Y (o contradomínio ou conjunto de chegada)

Se $f : X \to Y$, $W \subset X$ e $Z \subset Y$ definem-se as

- **imagem** de W por f:

$$f(W) = \{f(x) : x \in W\}$$

- **imagem inversa** de Z por f:

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X : f(x) \in Z\}$$

Propriedades

uma função $f : X \to Y$ diz-se

1. **injectiva** se
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in X;$$
2. **sobrejectiva** se
$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y;$$
3. **bijectiva** se for injectiva e sobrejectiva.

Relações

Uma função com domínio X e contradomínio Y é um subconjunto $f \subset X \times Y$ satisfazendo a propriedade seguinte: para cada $x \in X$ existe um único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

Generalizando, uma **relação** (binária) entre X e Y é um subconjunto $R \subset X \times Y$.

$(x, y) \in R$ é também descrito pela notação $x \, R \, y$.

Propriedades

Uma relação R num conjunto X é

- **reflexiva** se $x \, R \, x \, \forall x \in X$
- **simétrica** se $x \, R \, y \Rightarrow y \, R \, x$
- **anti-simétrica** se $x \, R \, y \wedge y \, R \, x \Rightarrow x = y$
- **transitiva** se $x \, R \, y \wedge y \, R \, z \Rightarrow x \, R \, z$

Relações de ordem e de equivalência

- Uma relação reflexiva, transitiva e anti-simétrica chama-se uma **relação de ordem (parcial)**;
- Uma relação de ordem em X diz-se **total** se

$$\forall x, y \in X \ \ x \, R \, y \vee y \, R \, x.$$

- Uma relação reflexiva, transitiva e simétrica chama-se uma **relação de equivalência**;

Exemplo: Dado um conjunto X,

- A relação em $\mathcal{P}(X)$ definida por
  U está em relação com V se $U \subset V$,
  é uma relação de ordem.
- A relação em $\mathcal{P}(X)$ definida por
  U está em relação com V se existe uma bijecção $f : U \to V$,
  é uma relação de equivalência.