

1 Problemas para a aula de 22/10

- Em que classes de congruência $\pmod{8}$ estão os quadrados perfeitos?
4926834923 poderá ser a soma de dois quadrados perfeitos?
- Se $n > 1$ e $n^2 + 2$ é primo, justificar que $3 \mid n$.
- Resolver as seguintes congruências (encontrar todas as soluções ou justificar que não existem):
 - a) $110x \equiv 40 \pmod{575}$;
 - b) $1011x \equiv 1101 \pmod{1110}$;
 - c) $501x \equiv 345 \pmod{72}$;

- Mostrar que todo o inteiro da forma $4k + 3$ tem algum factor da mesma forma. Deduzir que existem infinitos primos congruentes com 3 módulo 4.

Podemos aplicar o mesmo raciocínio para inteiros da forma $4k+1$?
E da forma $6k + 5$?

- Seja p primo. Notando que para cada $1 < a < p - 1$ existe um (único) $1 < a' < p - 1$ tal que $aa' \equiv 1 \pmod{p}$, demonstrar o Teorema de Wilson:

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

se e só se p é primo.

- Determinar, usando o Teorema Chinês dos Restos, as soluções, se existirem, da equação

$$507x \equiv 312 \pmod{3025}$$

$$264x \equiv 31 \pmod{1573}$$

$$732x \equiv 84 \pmod{504}$$

- a) Determinar os pares de inteiros consecutivos tais que a sua soma é divisível por 9 e o seu produto é divisível por 11.
- b) Determinar o primeiro par de inteiros positivos ímpares consecutivos em que o menor deles é múltiplo de 17 e o maior é múltiplo de 11.