1 Problemas para a aula de 15/10

- Determinar o máximo divisor comum d de 843 e 312 e inteiros x, y tais que
$$d = 843x + 312y$$
com $0 < x < 100$.

- Determinar quantos pares de inteiros x, y existem satisfazendo as condições
$$1694x + 649y = 66 \qquad \text{e} \qquad |x + y| < 100.$$

- Se $mdc(a, b) = p$ e p é primo, quais são os possíveis valores de $mdc(a^2, b^3)$?

- Com quantos zeros termina a expansão decimal de 100!?
Sugestão: dado um primo p, quantos inteiros $1 \leq n \leq 100$ são divisíveis por p? e, para cada $k > 0$, quantos são divisíveis por p^k? Deduzir uma fórmula para o maior inteiro m que satisfaz $p^m \mid n!$.

- Neste exercício usamos a notação abreviada $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ para designar o máximo divisor comum dos inteiros $a_1, a_2, \cdots, a_n$.
O menor múltiplo comum é designado por $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.
Provar que se verificam as seguintes identidades ou dar um contra-exemplo:

  a) $(ma, mb) = m(a, b)$ e $[ma, mb] = m[a, b]$ para $m \in \mathbb{N}$;
  b) $((a, b), (a, c)) = (a, b, c)$ e $[[a, b], [a, c]] = [a, b, c]$;
  c) $(a, b)(c, d) = (ac, ad, bc, bd)$;
  d) se $(a, b) = (c, d)$ então $[a, b] = [c, d]$;
  e) se $(a, b) = (c, d)$ então $(a^2, b^2) = (c^2, d^2)$;
  f) $(ab, ac, b, c)[a, b, c] = abc$;

- Dado $n > 0$, $\sigma_k(n)$ é a soma das $k-$ potências dos divisores positivos de n:
$$\sigma_k(n) = \sum_{d>0,\, d|n} d^k.$$
Mostrar que se a e b são co-primos então $\sigma_k(ab) = \sigma_k(a)\sigma_k(b)$.

- A sucessão dos **números de Fermat** é definida por $F_n = 2^{2^n} + 1$.

  a) Usar a igualdade $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$ para mostrar que, para todo o $n > 1$,
  $$F_n = \prod_{k=1}^{n-1} F_k + 2$$
  e concluir que se $n < m$ então F_n e F_m não têm factores comuns. Notar que este facto nos dá uma outra prova da existência de uma infinidade de primos.

  b) Completar os detalhes da seguinte demonstração alternativa do mesmo facto: se p fosse um factor primo comum de F_n e de F_m, então $p \mid (F_m - F_n)$, logo
  $$p \mid \left(2^{2^m - 2^n} - 1\right) = (F_n - 2) \sum_{k=0}^{2^{m-n}-2} 2^{2^n k};$$
  este somatório é da forma $1 + F_n M$, o que conduz a uma contradição.

  Nota: Pierre de Fermat parece ter conjecturado que os números F_n que têm o seu nome seriam todos primos. Isso é de facto verdade para $n < 5$ mas falso para todos os outros casos conhecidos. No entanto o problema de saber se existem infinitos F_n primos continua em aberto.

- Mostrar que se $a^n - 1$ é primo, então $a = 2$ e n é primo.