

1 Esboço de solução de alguns problemas

Apresentam-se aqui esboços de soluções de alguns dos problemas, isto é, é explicado, com um grau variável de pormenor, o raciocínio envolvido.

I.1.3 Mostrar que, se $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ e $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ são famílias de conjuntos satisfazendo

$$A_i \supset A_{i+1}, \quad B_i \supset B_{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

então

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) = \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \right)$$

Sem aquela condição esta igualdade verifica-se ou não?

Em geral, se pretendemos mostrar que duas expressões definem o mesmo conjunto, podemos tentar provar duas inclusões, ou seja, neste caso

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) &\subset \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) \\ \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i) &\supset \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) \end{aligned}$$

A segunda inclusão é simples (e não depende da condição sobre os conjuntos A_i e B_i): basta mostrar (porquê?) que

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i)$$

o que é uma consequência imediata das definições.

Para provar a outra inclusão podemos raciocinar assim: seja $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup B_i)$; se $x \in A_i$ para todo o $i \in \mathbb{N}$, não há nada a provar; caso contrário, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_k$; mas então também $x \notin A_j$ para todo o $j \geq k$ (porquê?); logo $x \in B_j$ para todo o $j \geq k$ e portanto (porquê?) $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ o que completa a prova. A resposta à última pergunta é negativa: basta escolher duas famílias de conjuntos definidas de modo a que um certo elemento pertença sempre a A_i ou a B_i mas que as intersecções $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$ sejam vazias.

I.2.3 Dada uma função $f : X \rightarrow Y$ e $A, B \subset X$, determinar se

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

Se $C, D \subset Y$ determinar se

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

A primeira igualdade é verdadeira

$$f(A \cup B) = \{y \in Y : \exists x \in A \cup B \ f(x) = y\} = \{y \in Y : \exists x \in A \ f(x) = y \vee \exists x \in B \ f(x) = y\} =$$

$$= \{y \in Y : \exists x \in A \ f(x) = y\} \cup \{y \in Y : \exists x \in A \ f(x) = y\} = f(A) \cup f(B)$$

mas a segunda é falsa, só vale em geral uma das inclusões (qual?). Quanto às outras igualdades, deve-se começar por lembrar o significado da notação, que não se refere à função inversa (f pode não ser injectiva!) mas à imagem inversa; por exemplo,

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

Com esta observação é fácil ver que ambas as igualdades são verdadeiras:

$$x \in f^{-1}(C \cup D) \Leftrightarrow f(x) \in C \cup D \Leftrightarrow f(x) \in C \vee f(x) \in D...$$

I.3.3 Considere-se a seguinte relação, que denotamos por exemplo por $\bowtie$, em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: $X \bowtie Y$ se $X \Delta Y$ é um conjunto finito. Mostrar que $\bowtie$ é uma relação de equivalência.

Que $\bowtie$ é reflexiva e simétrica é uma consequência imediata da definição de diferença simétrica (porquê?). Resta considerar a transitividade: suponhamos que $X \bowtie Y$ e $Y \bowtie Z$; basta mostrar que $X \setminus Z$ é um conjunto finito (porquê?); ora

$$X \setminus Z \subset X \setminus Y \cup Y \setminus Z$$

(certo?) o que completa a prova.

I.4.1 Dado um conjunto X mostrar que

- a) existe uma bijecção entre o conjunto $\mathcal{P}(X)$ dos subconjuntos de X e o conjunto $\{f : X \rightarrow \{0, 1\}\}$ das funções com domínio X e contradomínio $\{0, 1\}$.
- b) não existe uma função $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ sobrejectiva.

Sugestão: dada uma função qualquer $\phi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, considerar o conjunto $Y = \{x \in X \mid x \notin \phi(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.

Supondo que este conjunto pertence à imagem de ϕ , isto é, existe $x_0 \in X$ tal que $\phi(x_0) = Y$, será que $x_0 \in Y$?

Uma possível bijecção é dada pela fórmula que faz corresponder a $A \subset X$ a função

$$f_A : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

f_A é habitualmente chamada a **função característica** de A (como subconjunto de X).

Suponhamos que A e B são subconjuntos distintos de X ; basta considerar o caso em que existe $x \in A \setminus B$; então verificamos que

$$f_A(x) \neq f_B(x)$$

e portanto f_A e f_B são funções diferentes; ou seja, a nossa correspondência é injectiva.

Para vermos que é sobrejectiva, temos que mostrar que, dada uma qualquer função $f : X \rightarrow \{0, 1\}$, ela é a função característica de algum subconjunto de X , o que é verdade: considere-se o conjunto

$$A = \{x \in X : f(x) = 1\}.$$

Este raciocínio deve ser acompanhado pela ilustração de um caso simples com X finito: nesse caso, podemos imaginar os elementos de X representados por uma lista e as funções $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ como sequências de 0 e 1, com $|X|$ elementos; generalizando um pouco, o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ pode ser identificado com o das sucessões de 0 e 1.