# Cálculo Diferencial e Integral I

## Exercícios 6: Teoremas do Valor Médio e Fórmula de Taylor´

1 (*) - Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

a) Justificar que se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = b$:

   i) Seja $\epsilon > 0$ arbitrário; existe $M$ tal que $|f'(x) - b| < \epsilon$ para todo o $x > M$;

   ii) se $x > M$, existe $y \in ]M, x[$ tal que $f(x) = f(M) + f'(y)(x - M)$;

   iii) majorar, usando as alíneas anteriores, $\left|\frac{f(x)}{x} - b\right|$.

b) Repetir o raciocínio anterior para o caso $b = +\infty$.

c) A recíproca é verdadeira? Ou seja, é verdade que se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = b$ então $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$ ?

2 - Sejam $f$ e $g$ funções diferenciáveis no intervalo $[a, b]$ e $g'(x) \neq 0$, para todo o $a < x < b$.
aplicando o Teorema de Rolle a

$$h(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

mostrar que existe $c \in ]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3 - Uma função $f : ]a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ tem assíntota (à direita) $bx + c$ se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (bx + c) = 0.$$

a) Será verdade que se $f$ tem assíntota $bx+c$ então $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$?

b) Será verdade que se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$ então $f$ tem assíntota $bx+c$ para algum $c \in \mathbb{R}$?

4 - Uma função $f$ é convexa num intervalo $I$ se, para $]a,b[\subset I$ e $t \in [0,1]$ se verifica

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b).$$

a) Interpretar geometricamente: $f$ é convexa se o gráfico de $f$ no intervalo $]a,b[$ está abaixo da recta $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

b) Mostrar que se $f$ é diferenciável em $I$ e $f'$ é crescente então $f$ é convexa nesse intervalo.

c) Seja $f$ convexa no intervalo $I$; mostrar que se $x_1, \cdots, x_n \in I$ e $a_1, \cdots, a_n$ são números não negativos tais que $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, então

$$f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) \leq a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \cdots a_nf(x_n).$$

d) Usar o facto de $-\ln(x)$ ser estritamente decrescente e convexa no intervalo $]0,+\infty[$ para deduzir as desigualdades

i) Se $x_1, \cdots, x_n$ são reais positivos, então

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$

ii) Se $x, y > 0$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

5 - Mostrar que se as raizes de um polinómio $p(x)$ de grau $n$ são todas reais, então as raizes de $p'(x)$ também são todas reais.

6 - Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Mostrar que se

$$f(0) = 0, \ f(1) = 1 \text{ e } f(2) = 2$$

então existe $a \in ]0,2[$ tal que $f''(a) = 0$.

7 -

a) Determinar os polinómios de Taylor de ordem 10, relativos ao ponto 0, das funções $\cosh(x)$ e $\sinh(x)$.

b) Determinar o polinómio de Taylor de ordem 10, relativo ao ponto $\pi/3$, de $\sin(x)$.

c) Determinar o polinómio de Taylor de ordem 4, relativo ao ponto 1, de cada uma das seguintes funções

   i) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$;

   ii) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$;

   iii) $\frac{1}{x^2}$.

   .

8 - Determinar o polinómio $p(x)$ de grau menor possível que satisfaz a condição

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh(x) - \cos(x) - p(x)}{x^5} = 0$$

9 - Calcular o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)\sinh(x) - \sin(x^2)}{x^6}$$

10 - Determinar as constantes $a$ e $b$ de modo a que

$$\cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

seja um infinitésimo da maior ordem possível.

11 - Mostrar que o polinómio

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

aproxima $\sqrt{1+x}$ com erro inferior a $\frac{|x|^3}{2\sqrt{2}}$, se $|x| < \frac{1}{2}$.

12 - Calcular o polinómio de Taylor de ordem 5 relativo ao ponto 1 da função $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

13 - Calcular as derivadas de ordem 8, 9 e 10 no ponto 0 da função $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

14 - Usando a fórmula de Taylor, calcular as constantes $A_i$ e $B_i$ na igualdade seguinte

$$\frac{x}{(x-2)^3(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Sugestão: multiplicar ambos os membros da equação por $(x-2)^3$ num caso e por $(x+1)^2$ no outro.

15 - Determinar se as funções seguintes têm um extremo no ponto 0:

a) $\sqrt{2} + \frac{3}{5}x^6 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^7$;

b) $\pi - \frac{\pi}{4}x^4 + \frac{\pi}{7}x^7$

16 - Sejam $f$ e $g$ funções reais de classe $C^4$ definidas num intervalo contendo 0, cujos polinómios de Taylor de ordem 4 no ponto 0 são, respectivamente,

$$p(x) = 1 + x^3 + ax^4 \text{ e } q(x) = 1 - x^3 + bx^4.$$

a) $f$ e $g$ têm um ponto crítico em 0? Algum deles é um extremo?

b) Determinar uma condição nas constantes $a$ e $b$ que garanta que $fg$ tenha um máximo no ponto 0.