Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 5: Diferenciabilidade

1 - Calcular,nos pontos em que que estejam definidas, as derivadas das funções

$$
\begin{array}{lll}
x|x| & e^{\arctan x} & (\ln x)^x \\[1em]
\sqrt[3]{x}\sin x & \frac{x}{|x|+|x-1|} & \frac{\tan^3 x^2-\tan^2 x^3}{x} \\[1em]
\ln\sqrt[3]{x^2+1} & (\sin(x)+1)^{\cos x} & \log_x 2 \\[1em]
\sqrt{x^4+x^2} & \left(2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^5 & \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-8}
\end{array}
$$

2 - Calcular, nos pontos em que estejam definidas, as derivadas das funções

$$\log(|\cos(x)|), \qquad \arccos\left(\frac{1}{|x|}\right), x^x, \qquad x^{1/x}$$

3 - Determinar as constantes a, b de modo a que a função

$$\begin{cases} ae^x - e^{2x} & x \leq 0 \\ \ln(1+x^2)+b & x > 0 \end{cases}$$

seja diferenciável em $\mathbb{R}$.
Determinar a equção da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1.

4 - Determinar as constantes a, b, c, d de modo a que a função

$$\begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ cx^2+dx & 0 < x \leq 1 \\ 1-\frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

seja diferenciável em $\mathbb{R}$.

5 - Calcular as derivadas, nos pontos em que existirem, das funções

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

6 - Calcular, nos pontos em que esteja definida, a derivada da funçãcontínua em $\mathbb{R}$, definida para $x \neq 0$ por

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Mesma pergunta para $f(x) = x^2 \sin(x^{-1}) + x$.

7 - Mostrar que as equações

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0, \qquad 3^x + 4^x = 5^x$$

têm cada uma exactamente uma solução real.

8 - Seja $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 e^{\frac{x-1}{2}}$.

a) Mostrar que f tem um zero no intervalo $]1,3[$;

b) designando esse zero por a, mostrar que f'' tem um zero no intervalo $]0,a[$.

9 - Mostrar que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três soluções reais.

10 - Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que f'' é limitada e $f(0) = f'(0) = 0$. Mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq Cx^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

11 - Determinar a equação das retas que passam no ponto $(0,-1)$ e são tangentes à parábola $y = x(x+1)$.

12 - Justificar que a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(\pi x) - 4x$$

tem inversa e calcular a derivada de f^{-1} no ponto 1.

13 - Determinar, em função do parâmetro a, quantas raizes reais tem o polinómio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - a.$$

14 - Qual o cilindro com volume V que tem superfície total com menor área?

15 - Com uma folha quadrada de lado 10 cm constroi-se uma caixa (sem tampa) recortando um quadrado em cada canto. De que tamanho devem ser os recortes para que o vlume da caixa seja máximo?

16 - Determinar qual o comprimento mínimo de um segmento vertical (ou seja, paralelo ao eixo $x = 0$) com um extremo na curva $y = 4x^3$ e o outro na curva $y = x^4 + 29$.

17 - Determinar os extremos e intervalos de monotonia das funções

$$e^x(x^2 - x - 1), \qquad \frac{x+3}{\sqrt{x^2 - x + 1}}, \qquad e^{-x^2+x}(1-x)$$

18 - Calcular os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^3 \log(x), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))^2}{\tan(x) - x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log(\frac{e^x + (e^x)^2}{e^{2x} + x^2})$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}, \qquad \lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$$