

Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 3: Sucessões

1 - Calcular, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões:

$$\begin{array}{ll} \frac{\sqrt{n^2-1}+(-1)^n n}{2n+3} & \frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}} \\ \frac{(3^n+1)^2}{1+7^n} & \frac{2^{n+3}+5^{n+1}}{3^{n+2}+5^{n+4}} \\ \frac{n+(-1)^n(n+1)}{n+\sqrt{n+1}} & (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{2n+1} \\ \frac{n^2+\sqrt[3]{n^7+1}+\cos(n^2)}{n^3+\sqrt{n^7+1}+3} & \sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} \end{array}$$

2 - Dado $\delta > 0$, para n suficientemente grande verifica-se

$$n < (1 + \delta)^n.$$

Concluir que $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

3 - Determinar, ou mostrar que não existem, os limites das sucessões

$$\begin{array}{ll} \sqrt[n]{2+\cos(n)} & \sqrt[n]{\frac{n^2+n+1}{n^3+n+2}} \\ \sqrt[n]{2^n+n^2} & \sqrt[n]{4(-1)^n+5} \end{array}$$

4 - Dado $x \in \mathbb{R}$, mostrar que $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ é estritamente crescente para $n > -x$: verificar que

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$$

e aplicar a Desigualdade de Bernoulli (problema 1 da Ficha 1).
Concluir que, para $n > |x|$,

$$u_n(x) < u_{n+1}(x) < \frac{1}{u_{n+1}(-x)} < \frac{1}{u_n(-x)}$$

e que portanto, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a sucessão $u_n(x)$ é convergente.

5 - Determinar, se existir, o limite das sucessões definidas pelas expressões seguintes:

$$\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^n; \quad \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n; \quad \left(\frac{n+2}{n-1}\right)^{n^2}; \quad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

6 - Sabemos que (ver exercício 4) para todo o $n > 1$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Concluir que, para $n > 1$,

$$\ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n} < \ln(n) - \ln(n-1)$$

e que portanto

$$\forall n > 1, \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \ln(n).$$

Mostrar que a sucessão $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ é monótona e limitada.

7 - Seja x_n uma sucessão de termos positivos. Se $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} = l < 1$ então, dado $l < b < 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \implies \frac{x_{n+1}}{x_n} < b.$$

Deduzir que para todo o $n > N$ se tem $x_n < x_N b^{n-N}$ e concluir que $x_n \rightarrow 0$.

O que se pode concluir se $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$?

8 - Determinar, se existirem, os limites da sucessões

$$\frac{a^n n^k}{n!}, a > 1, k \in \mathbb{N}; \quad \frac{(3n)!}{n!(2n)!}; \quad \frac{a^n n!}{n^n}; \quad \frac{a^{n^2}}{b^n}, 1 < a < b$$

9 - Mostrar que se $\lim_n x_n = L$, então também

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

Sugestão: queremos mostrar que, dado $\delta > 0$, se tem

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - L \right| < \delta,$$

para n suficientemente grande.

Começar por mostrar que, para um qualquer M fixo e $n > M$,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - L \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^M x_k - L \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=M+1}^n x_k - L \right|$$

e que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=M+1}^n x_k - L \right| \leq \left| \frac{M}{n(n-M)} \sum_{k=M+1}^n x_k \right| + \left| \frac{1}{n-M} \sum_{k=M+1}^n (x_k - L) \right|.$$

Notar que podemos escolher M de modo a que, para $k > M$, $|x_k - L| < \delta/3$.

10 - Seja x_n uma sucessão de termos positivos. Neste exercício demonstramos o seguinte resultado:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow L \implies \sqrt[n]{x_n} \rightarrow L.$$

Definimos a sucessão y_n :

$$y_0 = 1; \quad y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

e notamos que $x_n = \prod_{k=0}^{n-1} y_k$.

As desigualdades entre as médias aritmética, geométrica e harmónica (exercício 6 da Ficha 1) dá-nos

$$\frac{n}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{y_k}} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Por aplicação do exercício anterior, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \rightarrow L$ e deduz-se o resultado pretendido.

11 - Calcular, se existirem, os limites das sucessões

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}, \quad \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(2n)!}$$

12 - Seja y_n a sucessão definida por

$$y_1 = a > 0; \quad y_{n+1} = \sqrt{y_n + 1}.$$

Mostrar que a sucessão é monóton e limitada. Qual o seu limite?

13 - Justificar a convergência e determinar os limites das sucessões

a) $u_1 = 0, \quad u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4};$

b) $x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n};$

c) $y_1 = 1, \quad y_{n+1} = 1 + \frac{1}{y_n};$

d) $z_1 = \sqrt{2}, \quad z_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{z_n}};$

e) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}.$