

Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios 1: Princípio de Indução Finita. Proposições com quantificadores

1 - Mostrar que, se $0 < a < 1$, se tem para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$1 - na \leq (1 - a)^n \leq \frac{1}{1 + na}$$

Resolução : para $n = 0$ e $n = 1$ as desigualdades são obviamente verdadeiras. Suponhamos que para um certo n elas se verificam; então

$$(1 - a)^{n+1} = (1 - a)^n(1 - a) \leq \frac{1 - a}{1 + na},$$

por hipótese de indução e porque $1 - a > 0$;

$$\frac{1 - a}{1 + na} \leq \frac{1}{1 + (n + 1)a} \Leftrightarrow (1 - a)(1 + (n + 1)a) \leq 1 + na \Leftrightarrow 1 + na - (n + 1)a^2 \leq 1 + na,$$

e esta última desigualdade é evidentemente verdadeira. Portanto

$$(1 - a)^{n+1} \leq \frac{1}{1 + (n + 1)a}$$

e o passo de indução fica completado.

Do mesmo modo,

$$(1 - a)^{n+1} = (1 - a)^n(1 - a) \geq (1 - na)(1 - a) = 1 - (n + 1)a + na^2 \geq 1 - (n + 1)a.$$

2 - Demonstrar as fórmulas, válidas para qualquer $n \geq 1$,

a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2};$

b) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$

c) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k = \frac{1}{4}(1 - (-1)^n(2n + 1));$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

3 - Determinar uma fórmula "fechada" (ou seja, dependendo apenas de n , sem somatório) para

$$\sum_{k=1}^n (2k-1),$$

e demonstrá-la por indução.
Mesmo problema para

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2.$$

Resolução (do segundo problema): calculando os primeiros termos $1, -3, 6, -10$ e lembrando a fórmula dos números triangulares

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

somos levados a supôr que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n.$$

Provamos esta igualdade por indução; o caso $n = 1$ (e $n = 2, n = 3, \dots$) foi verificado directamente. Supondo a igualdade para n como hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2} (n+1)^2 = \\ &= (-1)^{n+2} \left((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right) = (-1)^{n+2} (n+1) \left((n+1) - \frac{n}{2} \right) = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

4 - Mostrar, para todo o $n \geq 1$,

a) $2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n};$

b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$

Resolução (da alínea b)): para $n = 1$ temos igualdade. Supondo que a desigualdade se verifica para um n ,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2};$$

temos que verificar que

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$$

para completar o passo de indução. Mas esta desigualdade é equivalente a

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} \geq \frac{n+2}{n+1}$$

que é obviamente verdadeira.

5 - Demonstre, por indução em n , que

$$\forall n \in \mathbb{N} (b_i > 0 \forall i \leq n \wedge \prod_{i=1}^n b_i = 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^n b_i \geq n$$

Nota: $\prod_{i=1}^n b_i$ designa o produto dos b_i , com $1 \leq i \leq n$.

Sugestão: Se $b_i = 1 \forall i$, o resultado é evidente; caso contrário, notar que: i) se $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n+1}$ são $n+1$ reais positivos tais que $\prod_{i=1}^{n+1} b_i = 1$, então $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ são n reais positivos cujo produto é 1; podemos supor que, por exemplo, $b_1 < 1 < b_2$; Mostre que se $0 < a < 1 < b$, então $ab < a + b - 1$.

6 - Usar o resultado do problema anterior para demonstrar o seguinte: dados n números reais positivos a_i , $1 \leq i \leq n$, verificam-se as desigualdades

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

ou seja, usando a notação para somatórios e produtos,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$$

As fórmulas acima representam, respectivamente, as médias harmónica, geométrica e aritmética dos números a_i , $1 \leq i \leq n$.

Usar estas desigualdades para provar

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2}{3} < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

7 - Considerando os conjuntos

$$I = [-2, 2],$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| + |x - 4| < 8\},$$

$$U = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-3)(x^2-2)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0\},$$

determinar se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

$$\exists y \in B \forall x \in I : x + y \in U$$

$$\forall x \in I \exists y \in B : x + y \in U$$

Sugestão: para a primeira proposição, notar que, dado um intervalo $I = [a, b]$ e $y \in \mathbb{R}$, se tem $\{x + y : x \in I\} = [a + y, b + y]$.
Para a segunda, estudar a negação da proposição.

8 - Considerando os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| \geq x^2\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|} \in \mathbb{N}\}$$

determinar o valor lógico das proposições

$$\forall x \in B \exists y > x \forall z (x < z < y \Rightarrow z \in B^c)$$

$$\forall x \in A \cap B \exists y > x \forall z (x < z < y \Rightarrow z \in A \setminus B)$$

Resolução:

$$|3x-4| \geq x^2 \Leftrightarrow 3x-4 \geq x^2 \vee 3x-4 \leq -x^2 \Leftrightarrow x^2-3x+4 \leq 0 \vee x^2+3x-4 \leq 0,$$

a primeira condição é impossível e resolvendo a segunda inequação concluímos que $A = [-4, 1]$. Por outro lado

$$B = \{\dots, -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9, \dots\} = \{\pm n^2 : n \in \mathbb{N}\}.$$

A primeira proposição é verdadeira: dado $x \in B$, $x = \pm n^2$, basta escolher $y = x + \frac{1}{2}$, uma vez que nesse caso o intervalo $]x, y[$ não contém qualquer número inteiro.

A segunda proposição é falsa: basta notar que $1 \in A \cap B$ e que, para qualquer $y > 1$, o intervalo $]1, y[$ não está contido em A .

9 - Interpretar cada uma das condições seguintes, dando exemplos de uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça essa condição

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : g(x) < a$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : (x > y \Rightarrow g(x) < g(y))$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x > y \wedge g(y) > g(x))$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : x > z \Rightarrow g(x) > y$$

10 - Dadas as condições

$$\exists a > 0 \forall x \in \mathbb{R} : g(x + a) = g(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists a > 0 : g(x + a) = g(x)$$

dar exemplos de uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a primeira condição e de outra que satisfaça a segunda mas não a primeira.