

Combinatória e Grafos - 2024-25

MAP 45 - 18/12/2024

1. (4 valores) Quantas permutações π do conjunto $\{1, 2, \dots, 8\}$ satisfazem a condição

$$\pi^3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)?$$

Resolução: seja $x \in \{1, 2, \dots, 8\}$ um elemento qualquer; ele pertence a um ciclo de π de comprimento k e, sabemos que $2 = k/d$, onde d é o máximo divisor comum de k e 3. Há dois casos possíveis: $d = 1$, e portanto $k = 2$; ou $d = 3$ e $k = 6$.

Assim, uma das soluções é que π só tenha ciclos de comprimento 2, ou seja,

$$\pi = (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8).$$

As outras soluções da equação têm necessariamente um ciclo de comprimento 6 e outro de comprimento 2, e vamos comprovar que existem 4×8 permutações nestas condições que satisfazem a igualdade. Temos 4 escolhas para o ciclo de comprimento 2, e podemos ordenar o ciclo de comprimento 6 de 8 maneiras: se, por exemplo, o ciclo for constituído pelos elementos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o ciclo terá a forma

$$(1, \ , \ , 2, \ , \);$$

há quatro escolhas para $\pi(1)$ (qualquer elemento dos outros dois ciclos) e esta escolha determina o valor de $\pi^4(1)$,

que terá que ser o outro elemento do ciclo de comprimento 2 a que pertence $\pi(1)$; e duas para $\pi^2(1)$ (um dos dois elementos do ciclo de comprimento 2 restante).

Em conclusão, existem 33 permutações que satisfazem a condição do enunciado.

Nota: o problema da outra versão

1. (4 valores) Quantas permutações α do conjunto $\{1, 2, \dots, 9\}$ satisfazem

$$\alpha^4 = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)?$$

resolve-se de modo semelhante. Nesse caso existem 10 soluções.

2. (4 valores) Determinar uma fórmula para o número de permutações do conjunto $\{1, 2, \dots, 30\}$ que têm ciclos de comprimento 2.

Resolução por aplicação do Princípio de Inclusão-Exclusão: dado um qualquer ciclo c de comprimento 2, designe-se por X_c o conjunto das permutações que contêm esse ciclo. A fórmula pretendida é

$$\sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} \sum |X_{c_1} \cap \dots \cap X_{c_j}|,$$

onde a soma interior é sobre todas as escolhas de j dos ciclos de comprimento 2 possíveis. Muitas dessas intersecções são vazias (se dois dos ciclos escolhidos tiverem um elemento em comum) mas a soma pode ser escrita como

$$\frac{1}{j!} \frac{30!}{2^j (30-2j)!} (30-2j)!$$

escolhemos j dos ciclos de comprimento 2 compatíveis e permutamos os restantes elementos; o factor $\frac{1}{j!}$ é necessário porque a ordem dos ciclos é irrelevante. E verificamos que $j \leq 15$.

Assim, a fórmula pretendida é

$$\sum_{j=1}^{15} (-1)^{j-1} \frac{30!}{j! 2^j}.$$

2. (4 valores) Determinar uma fórmula para o número de árvores com vértices $\{v_1, \dots, v_{40}\}$ que não têm vértices de grau 2.

Resolução: se T_i designa o conjunto das árvores em que v_i tem grau 2, queremos subtrair $|\cup_{i=1}^{40} T_i|$ ao número de todas as árvores com aquele conjunto de vértices.

Se escolhermos um conjunto qualquer de j vértices, o conjunto das árvores em que esses vértices têm grau 2 pode ser calculado através do código de Prüfer: temos que contar os códigos em que aqueles j vértices (ou mais precisamente os seus índices) ocorrem exactamente uma vez, o que é dado pela fórmula

$$\binom{38}{j} j! (40 - j)^{38-j} :$$

escolhemos j posições no código, preenchemo-las com os j valores escolhidos, completamos o código com os restantes valores.

Portanto, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão, a fórmula

pretendida será

$$\begin{aligned} 40^{38} - \sum_{j=1}^{38} (-1)^{j-1} \binom{40}{j} \binom{38}{j} j! (40-j)^{38-j} = \\ = \sum_{j=0}^{38} (-1)^j \binom{40}{j} \binom{38}{j} j! (40-j)^{38-j}. \end{aligned}$$

3. (6 valores) De quantas maneiras não equivalentes podemos atribuir pesos não negativos às arestas de um polígono regular com 10 lados de modo a que a soma de todos os pesos seja 40, se duas distribuições de pesos são equivalentes quando podemos transformar uma na outra por uma rotação do polígono?

Resolução: numeramos as arestas sequencialmente de 0 a 9 e vamos aplicar o Lema de Burnside; neste caso, o grupo de permutações das arestas do polígono tem dez elementos π^k , com $0 \leq k < 10$, onde π é a permutação cíclica

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$$

Contamos para cada permutação o número de distribuições de pesos, nas condições do enunciado, que ficam invariantes por essa permutação:

- a permutação identidade π^0 deixa invariantes todas as $\binom{40+9}{9}$ distribuições;
- para os quatro valores de k primos com 10, π^k tem um único ciclo de comprimento 10, e portanto a única distribuição invariante é a que atribui o mesmo peso 4 a todas as arestas;

- para os quatro valores de k tais que $\text{mdc}(10, k) = 2$, π^k tem 2 ciclos de comprimento 5 e as distribuições invariantes correspondem às soluções de

$$5x + 5y = 40 \Leftrightarrow x + y = 8$$

que tem 9 soluções;

- finalmente, π^5 tem cinco ciclos de comprimento 2 e as distribuições invariantes correspondem às soluções de

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 40 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

que tem $\binom{20+4}{4}$ soluções.

Deduzimos que o número pedido é dado pela fórmula

$$\frac{1}{10} \left(\binom{40+9}{9} + 4 + 4 \times 9 + \binom{20+4}{4} \right) = 205446630.$$

3. (6 valores) Um quadrado é dividido em 16 quadrados iguais. De quantas maneiras distintas podemos colorir esses quadrados com 4 cores, com a condição de ficarem exactamente 4 quadrados de cada cor, se identificarmos colorações que se podem obter uma da outra por uma rotação ou reflexão do quadrado?

Resolução: as 8 simetrias do quadrado grande determinam outras tantas permutações do conjunto dos 16 quadrados menores. Tal como no caso anterior, calculamos o número de colorações, nas condições do enunciado, que ficam invariantes para cada uma delas. A contagem pode ser facilitada se fixarmos uma ordem para as cores (chamemos-lhes A, B, C e D) e escolhermos por ordem os quadrados a colorir com cada cor:

- a identidade deixa invariantes todas as $\binom{16}{4,4,4,4}$ colorações;
- há duas rotações por um ângulo de $\pi/2$ que permutam os 16 quadrados em 4 ciclos de 4; cada uma tem portanto $4!$ colorações invariantes (atribui-se uma cor a cada ciclo);
- a rotação por um ângulo de π e as duas reflexões sobre um eixo que une lados opostos do quadrado têm 8 ciclos de comprimento 2; temos que escolher dois ciclos para cada cor, de $\binom{8}{2,2,2,2}$ maneiras possíveis;
- finalmente, as duas reflexões sobre eixos que unem vértices opostos têm quatro ciclos de comprimento 1 e seis ciclos de comprimento 2; há $4 \times \binom{6}{2,2,2}$ colorações invariantes em que os quadrados da diagonal têm todos a mesma cor; podemos também colorir dois conjuntos de dois ciclos de comprimento 2 com duas cores e atribuir cada uma das outras duas cores a um ciclo de comprimento 2 e a dois quadrados da diagonal fixa pela reflexão; para isso, formamos os quatro conjuntos de ciclos de

$$\frac{1}{2 \times 2} \binom{6}{2, 2, 1, 1} \times \binom{4}{2}$$

maneiras: escolhemos os dois conjuntos de dois ciclos de comprimento 2 e dois pares formados por um ciclo de comprimento 2 e por 2 quadrados da diagonal; temos que dividir por 2 por cada par de conjuntos do mesmo tipo; e atribuímos as 4 cores a esses conjuntos.

Chegamos à fórmula

$$\frac{1}{8} \left(\binom{16}{4, 4, 4, 4} + 2 \times 4! + 3 \binom{8}{2, 2, 2, 2} + 2 \left(4 \binom{6}{2, 2, 2} + 6 \binom{4}{2} \binom{6}{2, 2, 1, 1} \right) \right)$$

que resulta no valor 7885536.

4. (5 valores) G é um grafo simples, conexo e planar, com 13 vértices. Uma representação plana de G tem cinco faces de grau 4, quatro de grau 3 e duas de grau m . Determinar m .

Resolução: a fórmula de Euler dá-nos a igualdade

$$2 = 13 - (5 \times 4 + 4 \times 3 + 2m)/2 + 11 \Leftrightarrow m = 6.$$

4. (5 valores) Dado um grafo planar conexo, regular de grau 3, em que cada face tem grau 5 ou 6, determinar o número de faces de grau 5.

Resolução: pela fórmula de Euler,

$$2 = v - 3v/2 + (a + b), \quad 5a + 6b = 3v,$$

onde v é o número de vértices, a o número de faces de grau 5 e b o número de faces de grau 6; note-se que, como o grafo é regular de grau 3, o número de arestas é $3v/2$. Obtemos um sistema de equações

$$\begin{cases} a + b = 2 + v/2 \\ 5a + 6b = 3v \end{cases},$$

que implica (por exemplo, multiplicando a primeira equação por 6 e subtraindo a segunda) $a = 12$.

5. (5 valores) Determinar o polinómio cromático de uma floresta com n vértices e k componentes conexas.

Resolução: uma árvore com m vértices tem polinómio cromático $p(x) = x(x-1)^{m-1}$, o que se pode comprovar, por exemplo, por indução em m .

O polinómio cromático da floresta é o produto dos polinómios das diversas componentes conexas.

Se a floresta tem componentes $T_1, \dots, T_k$, como número de vértices, respectivamente, $m_1, \dots, m_k$ (sendo que, obviamente, $\sum_i m_i = n$), concluímos que o polinómio será

$$\prod_{i=1}^k x(x-1)^{m_i-1} = x^k(x-1)^{n-k}.$$

5. (5 valores) Seja G um grafo conexo que resulta de acrescentar uma aresta à união disjunta de um K_3 e um K_4 . Calcular o polinómio cromático de G .

Resolução: Se designarmos a aresta que liga o K_3 ao K_4 , o polinómio cromático de $G \setminus a$ é o produto de $p(K_3, x) = x(x-1)(x-2)$ por $p(K_4, x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

Como $p(G, x) = p(G \setminus a, x) - p(G/a, x)$, resta calcularmos esta última parcela; dadas x cores, colorindo o K_4 de $x(x-1)(x-2)(x-3)$ maneiras possíveis, a cor do vértice comum, resultante da contracção da aresta a , fica determinada, pelo que os restantes dois vértices podem ser coloridos de $(x-1)(x-2)$ maneiras, ou seja,

$$p(G/a, x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-1)(x-2),$$

e portanto

$$\begin{aligned} p(G, x) &= x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3) - x(x-1)^2(x-2)^2(x-3) = \\ &= x(x-1)^3(x-2)^2(x-3). \end{aligned}$$

6. (3 valores) Mostrar que um grafo simples G é bipartido se e só se satisfazer a seguinte propriedade: dados vértices x , y e z , se x e y são adjacentes então $\text{dist}(z, x) \neq \text{dist}(z, y)$.

Resolução: uma das implicações é simples: se G é bipartido, $G[X, Y]$, dados vértices nas condições do enunciado, podemos supor que $x, z \in X$ e $y \in Y$; então $\text{dist}(z, x)$ é par enquanto que $\text{dist}(z, y)$ é ímpar.

Esta observação ajuda por sua vez a provar a recíproca: seja z um vértice qualquer e designemos por X o conjunto dos vértices a distância par de z e por Y o conjunto dos vértices a distância ímpar de z . Vamos confirmar que o conjunto X é independente, ou seja, não há arestas entre os seus vértices: se x_1 e x_2 são vértices do lado X à mesma distância de z , pela propriedade do enunciado, eles não são adjacentes; se x_1 for o mais próximo de z entre os dois, e $\text{dist}(z, x_1) = 2m$, se x_1 e x_2 fossem adjacentes, $\text{dist}(z, x_2) = 2m + 1$, que é ímpar, contradição. O mesmo argumento mostra que Y é um conjunto independente, e $G = G[X, Y]$ é bipartido.

6. (3 valores) Mostrar que dado um grafo simples G conexo e com diâmetro maior ou igual a 3, o grafo complementar $\overline{G}$ é igualmente conexo e tem diâmetro menor ou igual a 3.

Resolução: a condição sobre o diâmetro diz que existem vértices x e y tais que $\text{dist}(x, y) \geq 3$. Seja

$$x - z_1 - \cdots - z_m - y$$

um caminho de comprimento mínimo entre aqueles dois vértices, com $m \geq 2$; isso implica que x e y não são adjacentes, que x não é adjacente a nenhum dos z_i com $i > 1$ e, de modo semelhante, y não é adjacente a nenhum dos z_i com $i < m$.

Se u e v são dois vértices quaisquer, diferentes de x e y ; u não pode ser adjacente a x e a y (caso contrário, $\text{dist}(x, y) \leq 2$) e o mesmo acontece com v .

Portanto, em $\overline{G}$, quer u quer v é adjacente a pelo menos um de x e y , que são eles próprios adjacentes nesse grafo complementar. Deduzimos que $\text{dist}(u, v) \leq 3$: em $\overline{G}$ existe um dos caminhos

$$u - x - v, \quad u - y - v, \quad u - x - y - v, \quad u - y - x - v.$$

Note-se que esta mesma observação implica que, para qualquer vértice u , no grafo complementar $\text{dist}(u, x) \leq 2$ e do mesmo modo $\text{dist}(u, y) \leq 2$, o que completa a dedução de que a distância entre quaisquer dois vértices em $\overline{G}$ é menor ou igual a 3.

7. (2 valores) Justificar a seguinte identidade, onde $S(k, n)$ designa o número de Stirling de segunda espécie:

$$\sum_{k=1}^n S(m, k) \frac{n!}{(n-k)!} = n^m.$$

Sugestão : Contar as funções $f : [m] \rightarrow [n]$, segundo a cardinalidade k da sua imagem.

Resolução: contamos as funções $f : [m] \rightarrow [n]$, cuja imagem tem cardinalidade k : decompomos o domínio em k partes não vazias, de $S(m, k)$ maneiras, e escolhemos para cada uma delas uma imagem de $n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ maneiras. Como há ao todo n^m funções, temos a igualdade.

7. (2 valores) Justificar a seguinte identidade, onde $c(n, j)$ designa o número de Stirling de primeira espécie:

$$\sum_{j=1}^n c(n, j)m^j = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}.$$

Sugestão : Podemos considerar que duas funções f e g de $[n]$ em $[m]$ são equivalentes se existir uma permutação π de $[n]$ tal que $g = f \circ \pi$.
Contar as classes de equivalência.

Resolução: o Lema de Burnside aplicado à contagem destas classes de equivalência dá-nos a fórmula

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi} |I(\pi)|,$$

onde a soma se faz sobre todas as permutações π de $[n]$. Ora uma função $f : [n] \rightarrow [m]$ é invariante por π se ela tomar o mesmo valor em todos os elementos de cada ciclo de π ; portanto, se π tiver j ciclos, existem m^j funções nessas condições.

Como existem $c(n, j)$ permutações de $[n]$ com j ciclos, a fórmula fica

$$\frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n c(n, j)m^j.$$

Mas, por outro lado, uma classe de equivalência é determinada pelos números de elementos de $[n]$ que têm como imagem cada elemento de $[m]$: a composição com uma permutação π altera a constituição desses conjuntos mas não o seu número. Logo existem $\binom{n+m-1}{n}$ classes, o que estabelece a igualdade do enunciado.