

Combinatória e Grafos- 2024-25

Ficha de preparação - 5

1 Combinatória Enumerativa

S_n designa aqui sempre o conjunto das permutações de um conjunto de cardinalidade n , por exemplo

$$[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Recorde-se que o tipo cíclico de uma permutação $\pi \in S_n$ é $[a_1, \dots, a_n]$ onde a_i é o número de ciclos de comprimento i de π .

Definição 1.1 Uma **transposição** é uma permutação $\tau \in S_n$ (onde $n > 1$) com um ciclo de comprimento 2 e que deixa fixos todos os outros elementos.

Nota 1.2 Podemos representar uma transposição τ apenas como $\tau = (a, b)$, onde este é o ciclo de comprimento 2.

Mais geralmente, uma permutação pode ser representada apenas pelos ciclos de comprimento maior que 1, ficando implícito que os elementos que não pertencem a esses ciclos ficam fixos pela permutação.

Lema 1.3 Qualquer permutação $\pi \in S_n$ (onde $n > 1$) é a composição de transposições.

Demonstração 1.4 *Verificamos (exercício!) que um ciclo $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, de comprimento $k > 2$ é a composição de transposições:*

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1, x_n) \circ \dots \circ (x_1, x_3) \circ (x_1, x_2).$$

Exercício 1.5 *Completar a demonstração, resolvendo o problema de representar os possíveis ciclos de comprimento 1 como composição de transposições.*

Exercício 1.6 *Mostrar que a decomposição de um ciclo como composição de transposições não é, em geral, única, escrevendo o ciclo*

$$(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

como uma composição de transposições diferente da anterior.

Exercício 1.7 *Seja $\pi \in S_{12}$ a permutação com a decomposição cíclica*

$$\pi = (0, 1)(2, 3, 4, 5)(6, 7, 8, 9, 10, 11).$$

Qual a decomposição cíclica de π^2 ?