

Combinatória e Grafos- 2024-25

Ficha de preparação - 4

1 Combinatória Enumerativa

Uma permutação α de um conjunto finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ é uma bijecção $\alpha : X \rightarrow X$, que pode igualmente ser interpretada como uma ordenação de X :

$$(\alpha(x_1), \alpha(x_2), \dots, \alpha(x_n)).$$

Se n é pequeno, podemos facilmente representar uma permutação α numa tabela

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \alpha(x_1) & \alpha(x_2) & \cdots & \alpha(x_n) \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.1 *Seja $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que podemos interpretar como o conjunto $\mathbb{Z}_7$ das classes de congruência módulo 7, e a permutação α definida por $\alpha(x) = x + 2 \pmod{7}$. Fazer a tabela de α como descrito acima.*

Exercício 1.2 *O conjunto $S(X)$ de todas as permutações de X tem (preencher o espaço em branco) elementos.*

O conjunto $S(X)$ tem uma operação de composição: se α e β são permutações de X , $\alpha \circ \beta$ definida, para qualquer $x \in X$ por

$$(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)),$$

é também uma permutação de X . Além disso, existe uma permutação ι (a identidade) definida por $\iota(x) = x$, para todo $x \in X$, que satisfaz, obviamente,

$$\iota \circ \alpha = \alpha \circ \iota = \alpha,$$

para qualquer $\alpha \in S(X)$; e, para cada $\alpha \in S(X)$ existe a permutação inversa α^{-1} definida por

$$\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \iota.$$

Denotamos a composição de α k vezes como α^k :

$$\alpha^k = \alpha \circ \alpha \circ \cdots \circ \alpha \text{ (} k \text{ vezes)}.$$

A operação de composição não é comutativa, em geral.

Exercício 1.3 *Seja $X = \mathbb{Z}_7$ e $\alpha \in S(X)$, como no exercício acima, e $\beta \in S(X)$ definida por $\beta(x) = 3x \bmod 7$.*

Escrever as tabelas de β , de $\alpha \circ \beta$ e de $\beta \circ \alpha$.

Seja X um conjunto com n elementos e $\alpha \in S(X)$. Para qualquer $x \in X$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha^k(x) = x.$$

Nesse caso, dizemos que

$$(x, \alpha(x), \alpha^2(x), \dots, \alpha^{k-1}(x))$$

é um ciclo de comprimento k da permutação α .

O mesmo ciclo pode também ser representado por

$$(\alpha(x), \alpha^2(x), \dots, \alpha^{k-1}(x), x),$$

e assim por diante.

Naturalmente, uma permutação de um conjunto finito X decompõe X numa união disjunta de ciclos.

Exercício 1.4 *Seja σ a permutação de $\{0, 1, \dots, 9\}$ definida por*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 9 & 5 & 2 & 7 & 6 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinar os ciclos de σ .

Exercício 1.5 *Se X tem n elementos quantas permutações de X têm um único ciclo?*