

Combinatória e Grafos- 2024-25

Ficha de preparação - 3

1 Teoria dos Grafos

Como preparação da próxima aula deverão ser estudados os tópicos sobre Teoria dos Grafos apresentados nas Fichas anteriores, incluindo os exercícios relevantes nas listas de problemas.

Um grafo simples G é determinado por qualquer das seguintes matrizes:

Definição 1.1 *Dada uma ordenação $v_1, \dots, v_n$ dos vértices de G , a **matriz de adjacência** A é a matriz $n \times n$ definida por*

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se os vértices } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definição 1.2 *Dadas ordenações $v_1, \dots, v_n$ e $a_1, \dots, a_m$ dos vértices e arestas de G , a **matriz de incidência** M é a matriz $n \times m$ definida por*

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } a_j \text{ incide no vértice } v_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 1.3 *Quantas matrizes de adjacência e de incidência tem um grafo simples com n vértices e m arestas?*

Exercício 1.4 *Contando as entradas 1 da matriz de incidência M , deduzir que a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número das arestas:*

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m.$$

Definição 1.5 *Uma sequência de inteiros*

$$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$$

*é uma **sequência gráfica** se existir um grafo simples com n vértices $v_1, \dots, v_n$ tal que $d(v_i) = d_i$, para todo o $1 \leq i \leq n$.*

Exercício 1.6 *Verificar se cada uma das sequências seguintes é uma sequência gráfica:*

a) 2, 2, 2, 1, 1;

b) 2, 2, 2, 2, 2;

c) 3, 3, 3, 2, 2;

d) 3, 3, 3, 3, 2, 2;