

Combinatória e Grafos- 2024-25

Ficha de preparação - 2

1 Combinatória Enumerativa

A primeira parte da preparação das próximas aulas é estudar bem a Ficha de preparação 1 e a aula anterior.

A imagem de distribuir "bolas" por "caixas" permite descrever muitos problemas de contagem, considerando os vários casos de bolas iguais ou distintas, caixas iguais ou distintas, e do tipo de distribuição: se é injectiva (cada caixa não fica com mais do que uma bola), sobrejectiva (não ficam caixas vazias) ou sem restrições.

Exercício 1.1 *Os casos apresentados acima são resumidos na tabela seguinte. Procurar preencher as entradas já conhecidas e interpretar o significado das outras.*

		<i>todas</i>	<i>injectivas</i>	<i>sobrejectivas</i>
$k \text{ bolas} \neq$	$n \text{ caixas} \neq$			
$k \text{ bolas} \neq$	$n \text{ caixas} =$			
$k \text{ bolas} =$	$n \text{ caixas} \neq$			
$k \text{ bolas} =$	$n \text{ caixas} =$			

Exercício 1.2 *Dados conjuntos A e B , é fácil verificar (certo?) que*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Determinar e interpretar as expressões correspondentes para três conjuntos A , B e C , e para quatro conjuntos A , B , C e D

2 Teoria dos Grafos

Se a e b são vértices de um grafo simples G , um **passeio** em G com início em a e fim em b é uma sequência $x_0, x_1, \dots, x_m$ de vértices em que $x_0 = a$, $x_m = b$ e x_i é adjacente a x_{i+1} , para todo o $0 \leq i < m$. Ou seja, o passeio parte de a ao longo de uma aresta até um vértice x_1 adjacente a $x_0 = a$, segue por uma aresta até um vértice x_2 adjacente a x_1 , e assim por diante. Se $a = b$ o passeio diz-se **fechado**. O **comprimento** de um passeio é o número de arestas percorridas (contando as repetições, se existirem).

Um passeio diz-se **simples** se não repetir arestas e é um **caminho** se não repetir vértices (exceptuando o vértice inicial e final, no caso de um passeio fechado).

A **distância** entre a e b é o mínimo dos comprimentos dos passeios com início em a e fim em b .

Exercício 2.1 *Justificar que um passeio de comprimento mínimo entre vértices a e b de um grafo G é sempre um caminho.*

Exercício 2.2 *Seja G o grafo das estações do Metropolitano de Lisboa.*

- a) Qual a distância entre **Telheiras** e **Arroios**?*
- b) Quantos passeios simples existem com início em **Telheiras** e fim em **Arroios**?*