

Combinatória e Grafos- 2024-25

Ficha de preparação - 1

1 Combinatória Enumerativa

Notação : $[n]$ designa o conjunto $\{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < n\}$. Usamos a abreviatura n -conjunto para referir um conjunto com n elementos. O número de elementos de um conjunto U é designado por $|U|$.

$\text{binom}nk$ designa o número de k -subconjuntos de um (qualquer) n -conjunto.

- De quantas maneiras podemos escolher uma sucessão de k elementos de um n -conjunto? Note-se que se trata de escolhas ordenadas (uma sucessão) e com possível repetição.
- De quantas maneiras podemos escolher uma sucessão de k elementos distintos de um n -conjunto? (escolhas ordenadas, sem repetição).
- De quantas maneiras podemos ordenar um k -conjunto?
- A partir das duas perguntas anteriores, deduzir a expressão para $\binom{n}{k}$.

2 Teoria dos Grafos

Um **grafo simples** G é definido por um conjunto V (os **vértices**) e um conjunto E (as **arestas**), em que cada aresta e corresponde a um 2-subconjunto $\{a, b\}$ de V . Dizemos que e **incide** nos vértices a e b ; nesse caso a e b são **adjacentes**.

Nota: a definição implica que dados dois vértices não há mais do que uma aresta incidente em ambos, e que não existem arestas incidentes num único vértice.

O **grau** de um vértice $a \in V$ é o número de vértices adjacentes a a . Um grafo diz-se **regular** se todos os vértices têm o mesmo grau.

O **complementar** de um grafo simples G é o grafo simples $\overline{G}$ que tem os mesmos vértices de G , mas em que dois vértices são adjacentes se e só se não são adjacentes em G .

Um grafo diz-se **bipartido** se o conjunto dos vértices for a união disjunta de dois conjuntos não vazios, X e Y , ou seja

$$V = X \cup Y, \quad X \cap Y = \emptyset, \quad X \neq \emptyset, \quad Y \neq \emptyset,$$

e cada aresta ligar um vértice $x \in X$ a um $y \in Y$. Usa-se a notação $G[X, Y]$ para designar um grafo bipartido (com decomposição $V = X \cup Y$ do conjunto dos vértices).

- Dado um n -conjunto V , quantos grafos simples existem com conjunto de vértices V ?
- Quantos desses grafos têm exactamente k arestas?
- Se um vértice v tem grau k em G , qual o seu grau em $\overline{G}$?