

Combinatória e Grafos - 2024-2025

Trabalho de Grupo

1. Em quantas matrizes $n \times n$, com entradas pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$ é que a linha i não é igual à coluna i , para todo $1 \leq i \leq n$?
2. Quantos polinómios mónicos de grau n com coeficientes em $\mathbb{Z}/p$, com p primo, não tomam o valor 0?
3. Demonstrar a igualdade

$$S(n, k) = \sum_{t=1}^{n-1} \binom{n-1}{t} S(t, k-1),$$

onde $S(n, k)$ designa o número de Stirling de segunda espécie.

4. Sejam $n > k > 2$ e t inteiros. A família $\{B_1, \dots, B_m\}$ de subconjuntos de $[n]$ satisfaz
 - i) $|B_j| = k \forall j$;
 - ii) cada 2-subconjunto de $[n]$ está contido em exactamente t conjuntos B_j
 - a) Determinar m em função de n, k e t ;
 - b) Justificar que o número l de conjuntos B_j que contém um $x \in [n]$ não depende de x e determinar l em função de n, k e t ;
5. Dado um conjunto $\{p_1, \dots, p_t\}$ de números primos, determinar, em função de t quantos inteiros

$$n = \prod_{j=1}^t p_j^{k_j}$$

têm exactamente $256 = 2^8$ divisores positivos?

6. Exercício **1.19** da Ficha complementar sobre Funções Geradoras.

7. Exercício **1.29** da Ficha complementar sobre Funções Geradoras.
8. Exercício **1.33** da Ficha complementar sobre Funções Geradoras.
9. Exercício **1.36** da Ficha complementar sobre Funções Geradoras.
10. Exercício **1.37** da Ficha complementar sobre Funções Geradoras.
11. Dado um grafo simples G , $\alpha'(G)$ é o número máximo de arestas num emparelhamento.
Mostrar que se G tem n vértices e não tem triângulos, então

$$\alpha'(G) = n - \chi(\overline{G}).$$

12. Seja G um grafo simples com vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ e

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(v_i) = \alpha.$$

Mostrar que G tem um subgrafo H tal que $\delta(H) \geq \alpha/2$.

- 13.
14. Dado um grafo simples, mostrar que existe uma partição do conjunto V_G dos vértices de G

$$V_G = V_1 \cup V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset,$$

tal que pelo menos metade das arestas de G têm um extremo em cada um dos conjuntos da partição.

15. Dado um grafo simples G com n vértices, define-se, para cada inteiro $k > 0$, $m_k(G)$ como o número de partições dos vértices de G em k conjuntos estáveis.
Mostrar que o polinómio cromático $p(G, x)$ de G satisfaz

$$p(G, x) = \sum_{k=1}^n m_k(G) x(x-1) \cdots (x-k+1).$$

16. Dado um grafo simples, conexo, com n vértices, m arestas e número de coloração $\chi(G) = k$, mostrar que

$$k \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Sugestão: dada uma decomposição

$$V_G = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

em conjuntos estáveis, majorar $2m$ em função dos $|V_i|$ e aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

17. Aplicar a demonstração do Teorema de Berge para provar que se M é um emparelhamento de G , existe um emparelhamento máximo M' que cobre todos os vértices cobertos por M .
18. Seja $G[X, Y]$ um grafo bipartido e $U \subset X$, $V \subset Y$, conjuntos de vértices. Mostrar que se existe um emparelhamento M_1 que cobre U e um emparelhamento M_2 que cobre V , então existe um emparelhamento M que cobre $U \cup V$.
19. Seja G um grafo simples com $2n$ vértices, com a propriedade

$$\forall x, y \in V_G, x \neq y \implies d(x) + d(y) \geq 2n - 1.$$

Mostrar que G tem um emparelhamento perfeito.

Sugestão: dado um emparelhamento não perfeito maximal, considerar o conjunto dos vértices não cobertos.