

Combinatória e Grafos - 2024-2025

Problemas - semana 7

1. Existe algum grafo bipartido com sequência de graus 6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 3?
2. Determinar quantos emparelhamentos perfeitos tem
 - a) $K_{n,n}$ (o grafo bipartido completo em que cada um dos dois conjuntos estáveis tem n vértices);
 - b) K_{2n} ;
 - c) $K_{2n} - a$ em que a é uma aresta de K_{2n} ;
 - d) $K_{2n} - \{a, b\}$ em que a e b são arestas de K_{2n} .
3. Mostrar que um grafo bipartido $G[X, Y]$ em que os graus satisfaçam a condição

$$\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad d(x) \geq d(y)$$

tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de X .

4. Se cada peça de um dominó cobre exactamente duas casas de um tabuleiro de xadrez, será possível cobrir o tabuleiro com peças do dominó, deixando apenas duas casas em cantos opostos descobertas?
5. Dizemos que um vértice v de um grafo G é essencial se é coberto por qualquer emparelhamento máximo de G .

- a) Dar um exemplo de um grafo sem vértices essenciais.
- b) Mostrar que uma árvore tem sempre vértices essenciais.

6. Suponhamos que um conjunto S tem a decomposição

$$S = A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, \quad |A_i| = m \quad \forall i$$

e também

$$S = B_1 \cup \dots \cup B_n, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ se } i \neq j, \quad |B_i| = m \quad \forall i.$$

Mostrar que existe uma permutação π dos índices $\{1, \dots, n\}$ tal que

$$A_i \cap B_{\pi(i)} \neq \emptyset, \quad \forall i.$$

Sugestão: Considerar a família de conjuntos $I_1, \dots, I_n$ definidos por

$$I_i = \{j \leq n : A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$$

6. Recorde-se que $\alpha'(G)$ designa o número de arestas num emparelhamento máximo de G . Mostar que

- a) $\alpha'(G) \leq n - \chi(\overline{G})$;
- b) se G não tem triângulos então $\alpha'(G) = n - \chi(\overline{G})$.

Sugestão: Na alínea a), considerar um emparelhamento máximo de G e verificar que podemos colorir $\overline{G}$ com $n - \alpha'(G)$ cores. Na alínea b) começar por verificar quantos vértices pode ter um conjunto estável em $\overline{G}$.

7. Fixamos um inteiro ímpar $n = 2m + 1$ e definimos o grafo bipartido $G[X, Y]$ do seguinte modo:

$$X = \{A \subset [n] : |A| = m\}, \quad Y = \{B \subset [n] : |B| = m+1\};$$

$A \in X$ e $B \in Y$ são adjacentes se $A \subset B$.

- a) Determinar o número de vértices e de arestas de $G[X, Y]$;
 - b) Aplicar o Teorema de Hall para mostrar que o grafo admite um emparelhamento perfeito.
8. Mostrar que uma árvore T tem no máximo um emparelhamento perfeito e que, se o tiver, então, para cada $v \in V_T$, $T \setminus v$ é uma floresta com exactamente uma componente de ordem ímpar.