

Combinatória e Grafos - 2024-2025 Problemas -

semana 6

1. Mostrar que um grafo G tem sempre pelo menos $\binom{\chi(G)}{2}$ arestas.
2. Mostrar que é possível ordenar os vértices de um grafo G de modo a que o algoritmo ganancioso de coloração use apenas $\chi(G)$ cores.
3. Seja G um grafo (simples) com vértices V . $S \subset V$ chama-se um **conjunto independente** ou **conjunto estável** se quaisquer dois vértices $u, v \in S$ não são adjacentes. $S \subset V$ chama-se uma **cobertura de G** se cada aresta de G incide em algum $v \in S$. Definem-se

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \subset V \text{ é um conjunto estável}\}$$

$$\beta(G) = \min\{|S| : S \subset V \text{ é uma cobertura de } G\}$$

Mostrar que $\alpha(G) + \beta(G) = |V|$.

4. Mostrar que se G é um grafo simples com n vértices e m arestas e sem triângulos, então $\Delta(G) \leq \alpha(G)$ e deduzir que

$$m \leq \frac{n\alpha(G)}{2}.$$

5. Seja G um grafo com $\chi(G) = k$ e

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$$

uma partição dos vértices em conjuntos estáveis, um para cada cor. Mostrar que para cada $i \leq k$ existe algum $v \in V_i$ que tem vértices adjacentes de todas as outras cores. Em particular, G tem que conter pelo menos k vértices de grau maior ou igual a $k - 1$.

Sugestão: analisar a negação da afirmação contida no enunciado.

6. Mostrar que se G tem sequência de graus $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, então

$$\chi(G) \leq \max\{\min(d_i + 1, i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

7. Dados grafos G e H com o mesmo conjunto de vértices V , definimos $G \vee H$ como sendo o grafo com vértices V e em que $u, v \in V$ são adjacentes se e só se o são em G ou em H (ou em ambos).

a) Mostrar que

$$\chi(G \vee H) \leq \chi(G)\chi(H).$$

Concluir que $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

b) Mostrar que $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

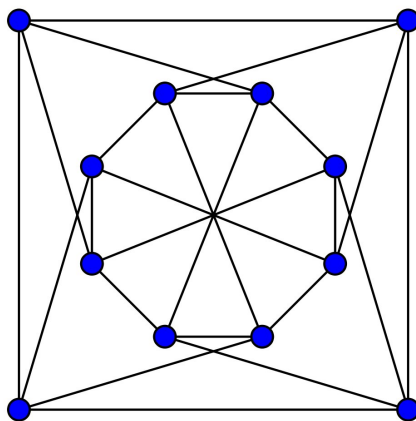
Sugestão para a segunda desigualdade da alínea b): usar a desigualdade do exercício anterior.

8. Dados inteiros r e t com $2r \leq t$, define-se o grafo de Kneser $Kn(r, t)$ do seguinte modo: os vértices são os subconjuntos de $[t] = \{1, 2, \dots, t\}$ com r elementos;

dois vértices são adjacentes se são disjuntos. Mostrar que $\chi(Kn(r, t)) \leq t - 2r + 2$.

Sugestão: indução.

9. Determinar o número de coloração do grafo de Chvátal representado na figura.



11. Determinar o número de vértices de $l(K_5)$, o grafo linha de K_5 , os seus graus e o número de coloração $\chi(l(K_5))$.