

Combinatória e Grafos - 2024-2025 Problemas -

semana 3

1. Seja G um grafo simples com n vértices e A a matriz de adjacência associada a uma ordenação

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

dos vértices.

Mostrar que a entrada (i, j) de A^k é igual ao número de passeios de comprimento k com início em v_i e fim em v_j .

2. Usar o exercício anterior para determinar, a partir de A ,
 - a) a distância entre dois vértices v_i e v_j ;
 - b) o **diâmetro** de G , ou seja, o máximo das distâncias entre dois vértices;
 - c) a **cintura** de G , isto é, o mínimo dos comprimentos dos ciclos (caminhos fechados) de G ;
 - d) uma condição necessária e suficiente para que G seja conexo;
 - e) mostrar que o número de triângulos (ciclos de comprimento 3) de G é dado por $\frac{1}{6}\text{tr}(A^3)$.
3. Seja G um grafo simples com n vértices e m arestas,
 - a) mostrar que se $m > \binom{n-1}{2}$, então G é conexo;
 - b) dar um exemplo de um grafo desconexo com n vértices e $m = \binom{n-1}{2}$ arestas;
 - c) mostrar que se o grau mínimo $\delta(G)$ de G satisfaz $\delta(G) > \frac{n-2}{2}$, G é conexo;
 - d) dar um exemplo de um grafo desconexo com n vértices e grau mínimo $\delta(G) = \frac{n-2}{2}$.
4. Seja G um grafo simples regular com 22 arestas. Quantos vértices tem G ?

5. Quantos grafos simples com 7 vértices, regulares de grau 4, não isomorfos, existem?

Sugestão: considerar o complemento do grafo.

6. Seja G um grafo simples com 10 vértices e 28 arestas. Justificar que G contém um ciclo de comprimento 4.

Sugestão: começar por mostrar que existem dois vértices u e v tais que

$$d(u) + d(v) \geq 12.$$

7. Mostrar que num grafo conexo dois caminhos de comprimento máximo têm sempre um vértice em comum.

8. Mostrar que para todo o $n \geq 2$ existe um grafo simples, conexo, com $2n$ vértices e regular de grau 3.