Combinatória e Grafos 2023-2024

1. [5 valores] Em quantas sequências de 60 lançamentos de um dado é que

a) todas as faces saem o mesmo número de vezes mas não há dois lançamentos 6 consecutivos?

b) a soma dos valores de todos os lançamentos é igual a 125?

Resolução : na alínea a)

$$\frac{50!}{(10!)^5}\binom{51}{10},$$

onde o primeiro factor nos dá o número de maneiras de ordenar os lançamentos de $1, 2, 3, 4, 5$ e o segundo o número de maneiras de intercalar entre eles os lançamentos de 6.
A alínea b) pede o número de soluções de

$$\sum_{i=1}^{60} x_i = 125,$$

com $1 \leq x_i \leq 6$, ou seja, de

$$\sum_{i=1}^{60} y_i = 65,$$

com a condição $0 \leq y_i < 6$ para todo o i, que pode ser calculado por inclusão -exclusão: se V_i é o conjunto das soluções da equação em que $y_i > 5$, queremos

$$\binom{65+59}{59} - \left|\bigcup V_i\right| = \binom{65+59}{65} - \sum_{j=1}^{10} (-1)^{j-1}\binom{60}{j}\binom{65-6j+59}{59}.$$

2.[3 valores] Determinar o número de árvores com vértices $v_1, \cdots, v_n$ que têm três vértices de grau 4, quatro vértices de grau 3 e em que todos os outros vértices têm grau 1.

Resolução : sendo n o número de vértices da árvore, temos

$$3 \times 4 + 4 \times 3 + (n-7) = 2(n-1) \Leftrightarrow n = 19.$$

Usando o código de Prüfer, o número de árvores com aquela propriedade é

$$\binom{19}{3,4,12}\binom{17}{3,3,3,2,2,2,2},$$

onde o primeiro factor conta o número de maneiras de escolher quais os vértices de cada grau e o segundo o número de códigos correspondentes aos graus.

3. [5 valores] Justificar que existem grafos simples com sequência de graus

$$6, 6, 6, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2.$$

Determinar se um grafo simples com essa sequência de graus

a) pode ser Euleriano ou se é sempre Euleriano;

b) pode ser bipartido.

Resolução : A sequência dada é sequência de graus de um grafo simples se cada uma das sequências seguintes o for também

$$5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2 \to 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2 \to 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2.$$

Uma vez que a última é a sequência de um grafo simples (um ciclo com 7 vértices), cada uma das outras também o é.
Como os graus são todos pares, um grafo com essa sequência de graus será Euleriano se e só se for conexo. Verificamos que esse é sempre o caso: se houvesse mais do que uma componente conexa teríamos que ter uma componente com pelo menos sete vértices contendo os vértices de grau 6 mas entre os restantes, no máximo 3, vértices há vértices de grau 4, o que é impossível.
Suponhamos que G é bipartido com $V = X \cup Y$ uma partição dos vértices; mais uma vez, se por exemplo X contém um vértice de grau 6, então Y tem que ter pelo menos 6 vértices, pelo que X tem no máximo quatro vértices; concluímos que X tem que conter todos os três vértices de grau 6. A soma dos graus dos vértices em X e em Y tem que ser igual e a única forma de satisfazer as duas

condições seria que um dos conjuntos, por exemplo X, contivesse os três vértices de grau 6 e de grau 4; mas isso leva a uma contradição: Y teria os restantes seis vértices, cada um deles necessariamente adjacente aos três de grau 6, mas um dos vértices tem grau 2.
Logo G não pode ser bipartido.

4.[4 valores] Sendo $\pi \in S_{10}$ a permutação com decomposição cíclica

$$\pi = (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9,10),$$

calcular o número de permutações ρ que satisfazem $\rho \circ \pi = \pi \circ \rho$.

Resolução : uma vez que para qualquer $x \in \{1, \cdots, 10\}$ temos que ter

$$\rho(\pi(x)) = \pi(\rho(x)),$$

ρ satisfaz a igualdade se transforma cada ciclo de π noutro ciclo de π, necessariamente do mesmo comprimento, preservando a ordem cíclica dos elementos. Logo $\rho(7) \in \{7,8,9,10\}$ determina as imagens dos restantes elementos do ciclo; quanto aos cilcos de comprimento 3, ρ pode mantê-los ou permutá-los; em qualquer dos dois casos ρ fica determinado pela imagem de um elemento de cada ciclo.
Concluímos que o número de permutações nas condições pedidas é $4 \times \times 2 \times 3^2$.

5.[3 valores] Dados grafos simples G e H com conjuntos de vértices V_G e V_H disjuntos , definimos $G[H]$ como o grafo com conjunto de vértices

$$\{(u,x) : u \in V_G; x \in V_H\},$$

e em que (u,x) é adjacente a (v,y) se e só se u e v são adjacentes em G ou se $u = v$ e x e y são adjacentes em H.
Mostrar que $\chi(G[H]) \leq \chi(G)\chi(H)$.
Determinar o número de arestas de $G[H]$ em função dos números de vértices e arestas de G e H.

Resolução : Se

$$f : V_G \to \{1, \cdots, \chi(G)\}, \qquad g : V_H \to \{1, \cdots, \chi(H)\}$$

forem colorações admissíveis para G e H, podemos considerar a coloração

$$h : V_{G[H]} \to \{1, \cdots, \chi(G)\} \times \{1, \cdots, \chi(H)\}$$

definida por $h(u, x) = (f(u), g(x))$; ou seja, colorimos $G[H]$ com pares de cores. Resta ver que se trata de uma coloração admissível: se (u, x) e (v, y) são adjacentes, então ou u e v são adjacentes em G e portanto $f(u) \neq f(v)$, ou então $u = v$ mas x e y são adjacentes em H e portanto $g(x) \neq g(y)$; em qualquer caso $h(u, x) \neq h(v, y)$.
Vamos calcular o grau de um vértice (u, x): esse vértice é adjacente a todos os (v, y) em que u e v são adjacentes, o que dá uma contribuição de $d(u)|V_H|$ para o grau; além disso, é tam bém adjacente aos vértices (u, y) em que x e y são adjacentes, o que contribui com $d(x)$ para o grau.
Portanto o número de arestas de $G[H]$ será

$$\frac{1}{2} \sum_{u \in V_G} \sum_{x \in V_H} (d(u)|V_H| + d(x)) = \frac{|V_H|}{2} \sum_{u \in V_G} \sum_{x \in V_H} d(u) + \frac{1}{2} \sum_{u \in V_G} \sum_{x \in V_H} d(x) =$$

$$\frac{|V_H|}{2} \times 2|E_G||V_H| + \frac{1}{2} \sum_{u \in V_G} 2|E_H| = |E_G| \times |V_H|^2 + |V_G| \times |E_H|.$$

6.[3 valores] Sejam n e k inteiros positivos. No conjunto das funções $f : [n] \to [k]$ definimos a relação de equivalência $f \sim g$ se $g = f \circ \pi$ para alguma permutação $\pi \in S_n$.
Mostrar que

$$\sum_{t=1}^{n} c(n, t) k^t = \frac{(n + k - 1)!}{(k - 1)!},$$

onde $c(n, t)$ designa o número de Stirling de primeira espécie.

Resolução : O enunciado sugere implicitamente que se use a relação de equivalência $f \sim g$ para aplicar o Lema de Cauchy-Frobenius-Burnside. De facto, uma classe de equivalência de funções corresponde a uma distribuição de n "bolas" idênticas por k caixas, e há $\binom{n+k-1}{k-1}$ distribuições.
Por outro lado, o número de classes de equivalência é

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} |I(\pi)|$$

onde $I(\pi)$ é o conjunto das funções fixas pela permutação π, ou seja, tais que $f \circ \pi = f$; mas $f \in I(\pi)$ se e só se for constante nos ciclos de π e portanto se π tem t ciclos há k^t funções nessas condições. Como há $c(n,t)$ permutações com t ciclos, e depois de cancelar $n!$ nos denominadores, obtemos a igualdade.