Combinatória e Grafos - 2023-2024

Trabalho de Grupo 3+4

1. Uma permutação σ de $\{1, 2 \cdots, 14\}$ tem dois ciclos de comprimento 4 e dois de comprimento 3. Quantas permutações π existem tais que

$$\pi \circ \pi = \sigma?$$

2. No conjunto das matrizes 3×4, com entradas em $\{0, 1, 2\}$, considere-se a relação de equivalência definida por $A \sim B$ se e só se existe uma matriz de permutação P tal que $B = AP$.
Determinar o número de classes de equivalência.

3. O interior de um polígono com n lados é decomposto em 7 triângulos e 4 quadrados obtendo-se uma representação plana de um grafo com 11 vértices. Determinar n.

4. Determinar o polinómio de coloração do grafo M_n definido do seguinte modo: M_n tem vértices

$$\{x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n, a\};$$

para todo o $i \leq n$, x_i e y_i são adjacentes, a é adjacente a todos os outros vértices, e não há mais arestas.

5. Seja G um grafo simples com grau máximo Δ e em que o número máximo de vértices num conjunto estável é α.

a) Mostrar que $\alpha \geq \frac{n}{\Delta+1}$;

b) Mostrar que se G é regular de grau k então $\alpha \leq \frac{n}{2}$.

6. Seja $G = G[X, Y]$ um grafo bipartido.
Se $A \subset V_G$ é o conjunto de vértices de grau máximo $\Delta > 0$, mostrar que existe um emparelhamento de G que cobre $A \cap X$. Concluir que existe um emparelhamento de G que cobre A.

7. Mostrar que uma árvore T tem no máximo um emparelhamento perfeito e que, se o tiver, então, para cada $v \in V_T$, $T \setminus v$ é uma floresta com exactamente uma componente de ordem ímpar.

8. Mostrar que a função geradora para o número a_k de maneiras de distribuir k bolas por 2 caixas C_1, C_2, com a condição de C_2 ficar com um número ímpar de bolas é

$$\sum_{k \geq 0} a_k z^k = \frac{z}{(1-z)^2(1+z)},$$

e usar uma decomposição da forma

$$\frac{z}{(1-z)^2(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1+z};$$

para determinar uma expressão explícita para a_k.

9. Considere-se a série formal $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ que é a inversa multiplicativa da Função Geradora dos números de partição. Temos portanto

$$\sum_{k \geq 0} a_k z^k = \prod_{n \geq 1} (1 - z^n).$$

Deduzir que a_k é igual ao número de partições de k num número par de parcelas distintas menos o número de partições de k num número ímpar de parcelas distintas.
Comprovar o resultado anterior para $k = 7$ e $k = 8$.