Combinatória e Grafos

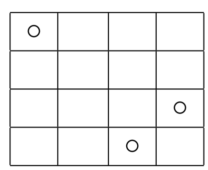
Trabalho de casa 3

1. Mostrar que o número de permutações $\pi \in S_n$ (com $n > 1$) que satisfazem $\pi^2(x) = x$, para todo o x é par.

2. Determinar, em função do tipo cíclico, quais as permutações $\pi \in S_n$ para as quais existe uma $\rho \in S_n$ que satisfaz $\rho^2 = \pi$.

3. De quantas maneiras podemos colorir as arestas de um cubo, usando m cores?

4. Dividimos um cartão quadrado em 16 quadrados iguais e perfuramos 3 desses quadrados no seu centro, como no exemplo da figura:



   Tendo em conta que o cartão é igual dos dois lados, quantos cartões diferentes podemos criar?
   E se perfurarmos 4 (ou 5 ou 6...) quadrados?

5. Mostrar que se G tem sequência de graus $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$, então
$$\chi(G) \leq \max\{\min(d_i + 1, i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

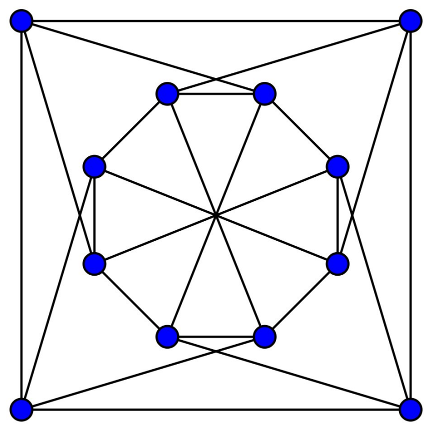
6. Dados grafos G e H com o mesmo conjunto de vértices V, definimos $G \vee H$ como sendo o grafo com vértices V e em que $u, v \in V$ são adjacentes se e só se o são em G ou em H (ou em ambos).

   a) Mostrar que
$$\chi(G \vee H) \leq \chi(G)\chi(H).$$
   Concluir que $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.

b) Mostrar que $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.

Sugestão para a segunda desigualdade da alínea b): usar a desigualdade do exercício anterior.

7. Determinar o número de coloração do grafo de Chvátal representado na figura.



8. Dado um grafo simples G com n vértices, seja $m_G(r)$ o número de partições estáveis de V_G com r conjuntos estáveis. Mostrar que
$$p(G, x) = \sum_{k=1}^{n} m_G(r) x^{\underline{r}},$$
onde $x^{\underline{r}} = x(x-1)\cdots(x-r+1)$.
Deduzir uma outra demonstração de que $a_{n-1} = m$, o número de arestas de G.

9. Mostrar que se G é um grafo conexo planar com n vértices e m arestas e em que o menor ciclo tem comprimento k, então
$$m \leq k\frac{n-2}{k-2}$$

10. Mostrar que se um grafo planar G é isomorfo ao seu dual então $|E_G| = 2(|V_G - 1)$.