1 Emparelhamentos em Grafos

Definição 1.1 *Um **emparelhamento** num grafo G é um conjunto de arestas não adjacentes entre si, isto é, incidentes em pares de vértices disjuntos dois a dois.*

i) Um vértice incidente numa aresta do emparelhamento diz-se coberto pelo emparelhamento.

*ii) Um emparelhamento M é **perfeito** se cobre todos os vértices de G.*

*iii) M é **maximal** se não existe um emparelhamento M' que contenha propriamente M, e é **máximo** se não existe um emparelhamento com maior número de arestas.*

O problema de determinar um emparelhamento máximo de um grafo pode ser resolvido pelo estudo de caminhos de um tipo especial: dado um emparelhamento qualquer M (não vazio!), um caminho M-alternado é um caminho em G em que, para quaisquer duas arestas consecutivas, uma pertence a M e a outra não; se o primeiro e o último vértice de um caminho M-alternado não são cobertos por M, dizemos que é um caminho M-aumentável.

Teorema 1.2 *(Berge): Um emparelhamento M de um grafo G é máximo se e só se não existe em G um caminho M-aumentável.*

Demonstração 1.3 *: Se existe um caminho M-aumentável, podemos criar um emparelhamento maior eliminando as arestas de M que pertencem ao caminho e incluindo as que não pertencem.*
Para provar a recíproca, suponhamos que M não é máximo e que existe portanto um outro emparelhamento M' com mais arestas que M. Considere-se o grafo H que se obtém de G eliminando as arestas que pertencem a ambos os emparelhamentos e as que não pertencem a nenhum deles (ou seja, conservam-se apenas as arestas da diferença simétrica $M \triangle M'$); cada vértice

v de H tem grau 0, 1 ou 2 porque v pode ser incidente no máximo a uma aresta de M e uma de M'; as componentes conexas de H só podem então ser ou vértices isolados, ou ciclos de ordem par com arestas alternadamente de M e de M', ou caminhos não fechados também com arestas alternadamente de M e de M'; como $|M'| > |M|$, o grafo H tem mais arestas de M' que de M e portanto pelo menos uma das componentes de H é um caminho que começa e termina com arestas de M' (que não pertencem a M); esse caminho é um caminho M-aumentável no grafo G.

Nota 1.4 *O conceito de caminho M-alternado aumentável está na base de um algoritmo de busca de um emparelhamento máximo num grafo.*
Numa descrição informal, o algoritmo tem como dados de entrada um grafo G, um emparelhamento inicial M em G (que pode ser simplesmente o emparelhamento vazio) e um vértice x não coberto por M e produz, através de uma busca em largura, uma árvore M-alternada com raiz em x.
Se houver um vértice v adjacente a x não coberto por M, poderíamos substituir M por $M \cup xv$ (onde xv designa a aresta unindo esses dois vértices); se todos os vértices adjacentes a x já estão cobertos por M, o algoritmo cria os primeiros ramos da árvore, ligando x a todos os vértices adjacentes e cada um destes ao seu par no emparelhamento M; em seguida, o algoritmo toma sucessivamente como vértice activo cada um destes últimos vértices; se em algum passo, se encontra um vértice adjacente não coberto por M, temos um caminho M-alternado, com início em x, e podemos substituir M por um emparelhamento maior como descrito na demonstração do teorema de Berge; caso contrário, o algoritmo aumenta a árvore, ligando o vértice activo a cada um dos vértices adjacentes (ainda não pertencentes àrvore) e estes aos seus pares em M, e assim por diante.
Este procedimento tem como resultado ou um novo emparelhamento maior que o inicial ou uma árvore M alternada maximal, ou seja, que não pode ser aumentada. Nesse caso, infelizmente, não se pode garantir que não existam caminhos M-alternados aumentáveis. Mas uma análise mais atenta (que se deixa como desafio) permite mostrar o seguinte: chamemos vértices vermel-

hos aos vértices da árvore criada pelo algoritmo que estão (na árvore) a uma distância par de x (incluindo o próprio x, claro).
Então, se nenhum par de vértices vermelhos for adjacente em G, não existe um caminho M-alternado aumentável que contenha vértices já incluídos na árvore. Evidentemente, neste caso podemos simplesmente eliminar de G os vértices da árvore e começar de novo.
Mais geralmente, as mesmas ideias permitem implementar um algoritmo que produz, em tempo polinomial, um emparelhamento máximo do grafo.

Definição 1.5 *Designa-se por $\alpha'(G)$ o número máximo de arestas de um emparelhamento.*

Recorde-se por outro lado que $\beta(G)$ é o número mínimo de vértices numa cobertura (uma cobertura é um conjunto de vértices tal que qualquer aresta do grafo incide em algum dos vértices desse conjunto).
Se M for um emparelhamento, qualquer cobertura tem que conter pelo menos um dos extremos de cada aresta do emparelhamento; como isto é verdade para qualquer emparelhamento e qualquer cobertura, temos

$$\alpha'(G) \leq \beta(G).$$

Uma outra estimativa mais interessante segue do seguinte raciocínio: suponhamos que temos em G um emparelhamento qualquer M e seja S um conjunto de vértices. O subgrafo induzido $G[V \setminus S]$ pode ter várias componentes conexas; se uma dessas componentes tiver um número ímpar de vértices, pelo menos um deles não pode estar emparelhado dentro da componente, logo só poderá estar emparelhado com algum dos vértices de S; e, evidentemente, cada um destes só pode estar emparelhado com um vértice.
Designando por $o(G[V \setminus S])$ o número de componentes conexas com um número ímpar de vértices daquele subgrafo, concluímos que o número de vértices **não coberto** por M é maior ou igual a

$$o(G[V \setminus S]) - |S|.$$

Como isto é verdade para qualquer emparelhamento e qualquer subconjunto S de vértices, obtém-se assim um majorante para $\alpha'(G)$.
É de facto possível demonstrar a seguinte

Proposição 1.6 *Fórmula de Tutte-Berge: Se G é um grafo com vértices V,*

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2}\min\{|V| - (o(G[V \setminus S] - |S|) : S \subset V\}.$$

1.1 Emparelhamentos em grafos bipartidos

Designamos por $G[X, Y]$ um grafo bipartido com partição $V = X \cup Y$ do conjunto dos vértices.
Recordamos a seguinte caracterização de grafos bipartidos:

Proposição 1.7 *Um grafo é bipartido se e só se não tem ciclos de comprimento ímpar.*

Os problemas relacionados com emparelhamentos em grafos bipartidos têm interesse especial e também resultados específicos que convém mencionar.

Dado um conjunto de vértices S, designa-se por $N(S)$ o conjunto de todos os vértices adjacentes a algum vértice de S. Evidentemente, para que um emparelhamento em $G[X, Y]$ cubra todos os vértices de X, é necessário que para qualquer $S \subset X$, se tenha $|N(S)| \geq |S|$; o teorema seguinte diz-nos que essa condição é também suficiente:

Teorema 1.8 *(Hall): $G[X, Y]$ tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de X se e só se para todo o $S \subseteq X$ se tem $|N(S)| \geq |S|$.*

Demonstração 1.9 : *Como já vimos, a condição é obviamente necessária: dado $S \subseteq X$ os vértices de S estão emparelhados com o mesmo número de vértices de Y e portanto $|N(S)| \geq |S|$.*
Para vermos que a condição é também suficiente, suponhamos que temos um emparelhamento máximo M que não cobre todos os vértices de X e seja x um desses vértices não cobertos. Como supômos que M é máximo podemos assumir que todos os vértices adjacentes a x estão emparelhados. Seja Z o conjunto dos vértices que podem ser alcançados por um caminho M-alternado com início em x; um caminho desse tipo parte de x por uma aresta de $A \setminus M$ para um vértice $y \in Y$, passa por uma aresta de M para um vértice de X, regressa a Y por uma aresta de $A \setminus M$ e assim por diante.
A hipótese de M ser máximo implica que x é o único vértice de Z não coberto pelo emparelhamento: se $v \in Z \cap X$, v está coberto por M pela própria definição de caminho M-alternado; e se $u \in Z \cap Y$ não estivesse emparelhado, o caminho de x até u seria M-aumentável, contrariando a hipótese de M ser máximo. Designando $S = Z \cap X$ e $R = Z \cap Y$ concluímos que os vértices de $S \setminus x$ estão emparelhados com os de R e que de facto $N(S) = R$; mas então $|N(S)| = |S| - 1$ e portanto a condição não se verifica.

Corolário 1.10 : *Um grafo bipartido $G[X, Y]$ tem um emparelhamento perfeito se e só se $|X| = |Y|$ e $|N(S)| \geq |S|$, para todo o $S \subseteq X$.*

Tem-se também o seguinte corolário cuja demonstração se deixa como exercício:

Corolário 1.11 : *Se $G[X, Y]$ é um grafo bipartido regular (ou seja todos os vértices têm o mesmo grau $k > 0$), então $G[X, Y]$ tem um emparelhamento perfeito.*

Tal como acontece com o teorema de Berge, a demonstração do Teorema de Hall pode ser posta em termos algorítmicos: dada uma ordem inicial

dos vértices de X, emparelhamos os elementos $x_1, x_2, \cdots$ até chegarmos à situação em que um x_k só tem vértices adjacentes já emparelhados; para descrever mais facilmente o algoritmo, vamos designar os vértices adjacentes de um determinado vértice como os seus vizinhos, o emparelhamento feito até aqui como M e quando um vértice está já emparelhado com outro dizemos que este é o seu par.
Construímos (usando um dos algoritmos de busca em grafos) um grafo do seguinte modo: ligamos $x_{]k}$ a todos os seus vizinhos (que, recorde-se, já estão emparelhados), ligamos cada um destes ao seu par, ligamos cada um destes a todos os seus outros vizinhos (se existirem), e assim por diante. A condição do teorema garante que mais tarde ou mais cedo tem que haver de facto um elemento de X neste grafo que tem um vizinho, chamemos-lhe $v \in Y$, ainda não emparelhado: caso contrário, o conjunto S de vértices de X incluídos neste subgrafo teria, digamos m vértices e $N(S)$ teria $m-1$ vértices (os pares dos $x \in S \setminus x_k$), contradizendo a condição do Teorema. Assim que encontramos esse v temos na árvore um caminho M-alternado que começa em x_k e termina em v e podemos usá-lo para aumentar o emparelhamento.

Mencionamos a seguir uma das interpretações do teorema de Hall com importância em combinatória.

Definição 1.12 *Dada uma família $S_1, S_2, \cdots, S_m$ de conjuntos, um **sistema de representantes distintos** é um conjunto $x_1, x_2, \cdots, x_m$ tal que*

$$x_i \in S_i \ \forall i \qquad x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$$

Podemos associar a uma família desse tipo um grafo bipartido $G[X, Y]$ em que $X = \{1, 2, \cdots, m\}$, $Y = \bigcup S_i$, e $i \in X$ e $u \in Y$ são adjacentes se $u \in S_i$. O Teorema de Hall implica então o seguinte

Teorema 1.13 *: Uma família de conjuntos $S_1, S_2, \cdots, S_m$ tem um sistema de representantes distintos se e só se para qualquer subconjunto $I \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$ se verifica a condição*

$$|\cup_{i \in I} S_i| \geq |I|$$

O Teorema de Hall é equivalente ao seguinte resultado, de que se apresenta uma demonstração independente:

Teorema 1.14 (König-Egérvary) *Num grafo bipartido $G[X, Y]$, o número máximo de arestas num emparelhamento é igual ao número mínimo de vértices numa cobertura, ou seja*

$$\alpha'(G[X, Y]) = \beta(G[X, Y]).$$

Demonstração 1.15 *: Em primeiro lugar, notamos que, para qualquer emparelhamento M e qualquer cobertura C num grafo G (não necessariamente bipartido), se tem*

$$|M| \leq |C|;$$

de facto, cada aresta de M incide em (pelo menos) um vértice de C e arestas a e b de M não podem incidir num mesmo vértice; logo, temos uma aplicação injectiva de M em C.
Para provar o Teorema basta portanto, dado um emparelhamento M máximo de $G[X, Y]$, encontrar uma cobertura C com $|M|$ vértices.

Seja então M um emparelhamento máximo em $G[X, Y]$ e $W \subset X$ o conjunto de vértices de X em que não incide uma aresta de M. Notamos que $|M| = |X| - |W|$.
Sejam $S \subset X$ e $R \subset Y$ os conjuntos de vértices de cada lado alcançáveis por um caminho M-alternado com início em W. Temos, por definição de caminho M-alternado, que $W \subset S$; além disso, se $y \in R$, então existe uma aresta de M incidente em y: caso contrário, o caminho M alternado com início num vértice $w \in W$ e fim em y seria M-aumentável, contrariando o Teorema de Berge.
Podemos então considerar a aplicação $h : R \to S \setminus W$ que a cada $y \in R$ faz corresponder o único vértice x tal que a aresta xy pertence a M, e verificamos que esta aplicação é uma bijecção: se $x \in S \setminus W$, a última aresta em qualquer caminho M alternado com início em W e fim em x é a aresta de M

incidente em x e portanto x é a imagem por h do vértice no outro extremo dessa aresta. Concluímos que

$$|R| = |S| - |W|.$$

Definimos então $C = (X \setminus S) \cup R$ e verificamos que se trata de uma cobertura: designamos cada aresta por xy em que x e y são os vértices em que a aresta incide, respectivamente do lado X e do lado Y; se $x \in X \setminus S$, é claro que a aresta xy está coberta por C; se $x \in S$, então x é o vértice final de um caminho M-alternado com início em W; caso $xy \in M$, a última aresta desse caminho foi precisamente xy, logo $y \in R$; se $xy \notin M$, o caminho M-alternado que termina em x pode ser prolongado através de xy até y e portanto, mais uma vez, $y \in R$ e, em qualquer dos dois casos, xy está coberta por C.
Mas

$$|C| = |X \setminus S| + |R| = |X| - |S| + |R| = |X| - |W| = |M|$$

usando as igualdades deduzidas nos parágrafos anteriores.

Nota 1.16 *O teorema de König-Egérvary pertence a um tipo de resultados habitualmente designados por min-max que estabelecem relações de igualdade entre o máximo de uma certa grandeza e o mínimo de outra. Citamos como exemplo uma das versões do Teorema de Menger: dado um grafo G e $x, y \in V(G)$, dois caminhos entre x e y dizem-se disjuntos se não têm outros vértices em comum; um conjunto de vértices $S \subset V(G) \setminus \{x, y\}$ separa x e y se estes dois vértices ficam em componentes conexas diferentes do grafo $G \setminus S$ (que se obtém de G eliminando os vértices de S e as arestas neles incidentes).*

Teorema *1.17 (Menger)* *Dado um grafo G e $x, y \in V(G)$, o número máximo de caminhos disjuntos entre x e y é igual ao número mínimo de vértices de um conjunto que separe x e y.*

Exercícios

1. Mostrar que um grafo G é bipartido se e só se para todo o subgrafo induzido H se verifica a desigualdade

$$\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|V_H|.$$

2. Existe algum grafo bipartido com sequência de graus $6, 6, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 3$?

3. Mostrar que um grafo bipartido regular de grau $k > 0$ tem um emparelhamento perfeito.

4. Determinar quantos emparelhamentos perfeitos tem

   a) $K_{n,n}$ (o grafo bipartido completo em que cada um dos dois conjuntos estáveis tem n vértices);

   b) K_{2n};

   c) $K_{2n} - a$ em que a é uma aresta de K_{2n};

   d) $K_{2n} - \{a, b\}$ em que a e b são arestas de K_{2n}.

5. Se cada peça de um dominó cobre exactamente duas casas de um tabuleiro de xadrez, será possível cobrir o tabuleiro com peças do dominó, deixando apenas duas casas em cantos opostos descobertas?

6. Dizemos que um vértice v de um grafo G é essencial se é coberto por qualquer emparelhamento máximo de G.

   a) Dar um exemplo de um grafo sem vértices essenciais.

   b) Mostrar que uma árvore tem sempre vértices essenciais.

7. Suponhamos que um conjunto S tem a decomposição

$$S = A_1 \cup \cdots \cup A_n,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j,\ |A_i| = m\, \forall i$$

   e também

$$S = B_1 \cup \cdots \cup B_n,\ B_i \cap B_j = \emptyset \text{ se } i \neq j,\ |B_i| = m\, \forall i.$$

   Mostrar que existe uma permutação π dos índices $\{1, \cdots, n\}$ tal que

$$A_i \cap B_{\pi(i)} \neq \emptyset,\ \forall i.$$

Sugestão: Considerar a família de conjuntos $I_1, \cdots, I_n$ definidos por

$$I_i = \{j \leq n : A_i \cap B_j \neq \emptyset\}$$

8. Recorde-se que $\alpha'(G)$ designa o número de arestas num emparelhamento máximo de G. Mostar que

   a) $\alpha'(G) \leq n - \chi(\overline{G})$;

   b) se G não tem triângulos então $\alpha'(G) = n - \chi(\overline{G})$.

   Sugestão: Na alínea a), considerar um emparelhamento máximo de G e verificar que podemos colorir $\overline{G}$ com $n - \alpha'(G)$ cores. Na alínea b) começar por verificar quantos vértices pode ter um conjunto estável em $\bar{(}G)$.

10. Fixamos um inteiro ímpar $n = 2m + 1$ e definimos o grafo bipartido $G[X, Y]$ do seguinte modo:

$$X = \{A \subset [n] : |A| = m\}, \qquad Y = \{B \subset [n] : |B| = m + 1\};$$

   $A \in X$ e $B \in Y$ são adjacentes se $A \subset B$.

   a) Determinar o número de vértices e de arestas de $G[X, Y]$;

   b) Aplicar o Teorema de Hall para mostrar que o grafo admite um emparelhamento perfeito.

11. Mostrar que se uma árvore T tem no máximo um emparelhamento perfeito e que, se o tiver, então, para cada $v \in V_T$, $T \setminus v$ é uma floresta com exactamente uma componente de ordem ímpar.

12. Aplicar a demonstração do Teorema de Berge para provar que se M é um emparelhamento de G, existe um emparelhamento máximo M' que cobre todos os vértices cobertos por M.

1.2 Emparelhamentos com prioridades ou o "problema dos casamentos"

Vimos já que se um grafo bipartido $G[X, Y]$ satisfaz a condição do Teorema de Hall para X, existe um emparelhamento que cobre todos os elementos de X. No entanto, em muitas situações de aplicação deste resultado, o problema é mais complexo.

Considere-se, por exemplo, a situação em que n pessoas se candidatam a m vagas; se todos os candidatos concorrem a todas as vagas, a condição para que todos fiquem colocados é simplesmente $|X| \leq |Y|$. Mas é possível que cada pessoa ordene as vagas numa lista de acordo com as suas preferências; do mesmo modo, podemos supôr que as empresas ou instituições com vagas a preencher ordenam os candidatos de acordo com as suas próprias preferências. O problema de saber como preencher as vagas de modo a satisfazer o melhor possível os desejos dos candidatos, ou os das empresas, ou ambos, ficou conhecido, por razões óbvias, como o problema dos casamentos. Nessa interpretação, bastante fantasista, cada um de um conjunto X de rapazes e cada uma de um conjunto Y de raparigas (todos heterosexuais e monogâmicos!) ordena os elementos do sexo oposto por ordem de preferência e mantém essa ordem ao longo do tempo; supôe-se igualmente que todos preferem estar "emparelhados" do que sózinhos.

Representamos os vértices masculinos por letras maiúsculas e os vértices femininos por letras minúsculas, sem qualquer intensão discriminatória. Convém, aliás, sublinhar que toda esta interpretação tem carácter meramente recreativo, não envolvendo, obviamente, qualquer juízo de valor sobre os padrões culturais nela incluídos; o autor destas linhas não assume evidentemente qualquer responsabilidade pela estabilidade e felicidade dos casamentos organizados de acordo com os resultados que se seguem...

Limitamo-nos, para maior simplicidade, ao caso em que $|X| = |Y|$ e em que todos os rapazes ordenam todas as raparigas e vice-versa. O nosso objectivo é estabelecer um emparelhamento estável: diremos que um emparelhamento (ou casamento) é estável se não contém pares Ab e Ba em que A e a se pre-

firam aos seus pares respectivos. Os matemáticos e economistas americanos Gale e Shapley apresentaram em 1962 a solução deste problema, mostrando que existe um algoritmo que tem como resultado um casamento estável.
A aplicação do algoritmo na nossa interpretação reproduz as regras sociais de norma na sociedade vitoriana: cada rapaz propõe casamento à rapariga da sua preferência que não o rejeitou até aí, e cada rapariga aceita a proposta do seu pretendente favorito. Em termos mais formais, podemos representar o algoritmo como uma sucessão de passos em que nos passos ímpares os rapazes fazem as suas propostas e nos passos pares as raparigas fazem a sua escolha.

Eis um exemplo muito simples: nos quadros seguintes apresentam-se as listas de preferências, seguindo-se depois a descrição da aplicação do algoritmo. Representamos uma proposta como **A ? a** e o resultado de uma aceitação como **A - a**. Nas linhas pares incluímos sempre os casais formados em passos anteriores e que se mantêm, para facilitar a visualização.

A -	a	b	c	d	e	a -	C	E	B	D	A
B -	c	a	e	b	d	b -	B	E	D	A	C
C -	a	d	c	b	e	c -	D	A	E	B	C
D -	a	b	c	e	d	d -	D	E	A	B	C
E -	c	a	b	d	e	e -	E	A	D	B	C

1. A ? a , B ? c , C ? a , D ? a , E ? c
2. C - a , E - c
3. A ? b , B ? a , D ? b
4. C - a , D - b , E - c
5. A ? c , B ? e

6. A - c , B - e , C - a , D - b c troca E por A;
7. E ? a
8. A - c , B - e , C - a , D - b a rejeita a proposta, logo nada se altera;
9. E ? b
10. A - c , B - e , C - a , E - b b troca D por E;
11. D ? c
12. B - e , C - a , D - c , E - b c troca A por D;
13. A ? d
14. A - d , B - e , C - a , D - c , E - b todos estão emparelhados;
15. celebram-se os cinco casamentos!

Alguns factos são de verificação imediata:

- No caso de n rapazes e m raparigas, o algoritmo termina no máximo em $2nm$ passos, e se $n \leq m$ termina com a criação de n pares;
- depois de comprometido, cada rapaz só muda para pior (do seu ponto de vista!) e, se $n > m$, só não termina emparelhado se for rejeitado por todas as raparigas;
- depois de se comprometer, uma rapariga nunca fica sem par e só muda para melhor (mais uma vez, de acordo com o seu ponto de vista...);

Teorema 1.18 : *O algoritmo de Gale-Shapley produz um emparelhamento estável.*

Demonstração 1.19 : *Com as observações anteriores, resta provar que o emparelhamento é estável. Suponhamos que* $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *não terminam emparelhados; isso só acontece se* $\boldsymbol{X}$ *nunca chegou a propor-se a* $\boldsymbol{y}$ *ou se* $\boldsymbol{y}$ *rejeitou* $\boldsymbol{X}$*;*

no primeiro caso, $\boldsymbol{X}$ *está emparelhado com alguém que prefere a* $\boldsymbol{y}$*, enquanto que no segundo caso é* $\boldsymbol{y}$ *que está emparelhada com alguém acima de* $\boldsymbol{X}$ *na sua lista. Num caso ou noutro a condição de estabilidade do emparelhamento está satisfeita.*

A observação seguinte permite-nos comparar o resultado desta aplicação do algoritmo com outros possíveis emparelhamentos estáveis (com as mesmas listas de preferências, bem entendido).

Lema 1.20 *: Se algum* $\boldsymbol{y}$ *rejeitou algum* $\boldsymbol{X}$ *no decurso da aplicação do algoritmo, então* $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *não ficam emparelhados em qualquer emparelhamento estável.*

Demonstração 1.21 *: usamos indução nos passos do algoritmo: suponhamos que estamos no primeiro passo do algoritmo em que algum* $\boldsymbol{y}$ *rejeitou algum* $\boldsymbol{X}$*, existindo um emparelhamento estável* M *em que* $\boldsymbol{X}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *estão emparelhados.*
Isso acontece se

- *ou* $\boldsymbol{y}$ *está emparelhado com* $\boldsymbol{T}$*, acima de* $\boldsymbol{X}$ *na sua lista;*
- *ou* $\boldsymbol{y}$ *estava emparelhada com* $\boldsymbol{X}$ *e rejeita-o por receber uma proposta de um* $\boldsymbol{T}$ *acima de* $\boldsymbol{X}$ *na sua lista.*

Em qualquer caso, existe um $\boldsymbol{T}$ *acima de* $\boldsymbol{X}$ *na lista de preferências de* $\boldsymbol{y}$*; mas no suposto emparelhamento* M*, temos o par* $\boldsymbol{X}$ *-* $\boldsymbol{y}$ *e portanto* $\boldsymbol{T}$ *estará emparelhado com alguma* $\boldsymbol{z}$*, que tem que estar acima de* $\boldsymbol{y}$ *na lista de preferências de* $\boldsymbol{T}$*, caso contrário* M *não é estável.*
Voltando à aplicação do algoritmo, se $\boldsymbol{T}$ *não está emparelhado com* $\boldsymbol{z}$*, é porque foi rejeitado por* $\boldsymbol{z}$ *num passo anterior, contradizendo a nossa hipótese de que* $\boldsymbol{y}$ *rejeita* $\boldsymbol{X}$ *era a primeira ocorrência desse tipo.*

Este resultado, juntamente com as observações anteriores, leva-nos a concluir que nenhum outro emparelhamento estável pode melhorar a situação de

qualquer dos proponentes **X**, ou seja, o resultado do algoritmo é o melhor emparelhamento estável para os proponentes.
Por outro lado, se o algoritmo produz o par **X** - **y** também não pode existir um emparelhamento estável em que **y** está emparelhada com um **S** abaixo de **X** na sua lista de preferências, pois nesse emparelhamento **X** teria que estar emparelhado com uma **z** acima de **y** na sua lista, caso contrário o emparelhamento não seria estável. Ora isso contradiz a conclusão anterior. Portanto o resultado do algoritmo é o pior possível para as raparigas (os aceitantes de propostas), no sentido em que noutro emparelhamento estável qualquer nenhuma poderia piorar de situação.

É possível generalizar o problema dos emparelhamentos estáveis em grafos bipartidos (listas de preferências incompletas, por exemplo) e adaptar o algoritmo a essas situações. Por outro lado, podem considerar-se problemas como o de emparelhamentos com preferências em grafos não bipartidos, para os quais não existe, em geral, uma solução estável.