1 Permutações

Dado $[n] = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ (qualquer conjunto com n elementos pode ser identificado com este) consideramos o conjunto S_n de todas as bijecções $f : [n] \to [n]$, ou permutações de $[n]$.

Sabemos já que $|S_n| = n!$.

Uma permutação π pode ser representada indicando numa tabela os valores de $\pi(x)$ para todos os $x \in [n]$. Por exemplo

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sendo bijecções de um conjunto nele próprio, as permutações podem ser compostas umas com as outras, obtendo-se novas permutações. Por exemplo, se π é a permutação definida anteriormente e

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$\pi \circ \rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

onde $\pi \circ \rho(x) = \pi(\rho(x))$.
No que se segue, representaremos abreviadamente $\pi \circ \rho$ por $\pi\rho$, não havendo perigo de confusão com outras operações. Em particular $\pi \circ \pi = \pi^2$, etc.

É importante notar que a composição de permutações é associativa

$$\pi(\rho\tau) = (\pi\rho)\tau, \qquad \forall \pi, \rho, \tau \in S_n,$$

mas não é (em geral) comutativa. Assim, por exemplo

$$\rho \circ \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Existe um elemento neutro para a composição, a permutação identidade

$$\iota : [n] \to [n],\ \iota(x) = x,\ \forall x$$

e todo o elemento $\pi \in S_n$ tem um inverso que representamos por π^{-1}. Por exemplo, para o exemplo acima

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Portanto S_n é um conjunto fechado para uma operação associativa, existindo um elemento neutro e tal que todo o elemento tem um inverso. Este conjunto de propriedades resume-se dizendo que S_n munido da operação de composição é um **grupo** .

Nota 1.1 *O grupo S_n tem uma representação matricial: a cada permutação π fazemos corresponder a matriz M_π com n linhas e n colunas definida por*

$$M_\pi(i,j) = \begin{cases} 1 & \textit{se } \pi(j) = i \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

(onde as linhas e colunas foram indexadas pelos elementos de $[n]$ e não como habitualmente por $1, \cdots, n$).
Estas matrizes de permutação podem ser caracterizadas como as matrizes quadradas de dimensão n com entradas iguais a 0 ou 1 e que têm exactamente um 1 em cada linha e em cada coluna.
Como se verifica facilmente, a matriz M_π foi definida de modo a que se tenha

$$M_\pi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

Deduz-se então que

$$M_{\pi\circ\rho} = M_\pi \cdot M_\rho$$

ou seja, a composição de permutações "traduz-se" no produto de matrizes.

1.1 Decomposição cíclica de permutações

Dado $x \in [n]$, a sucessão
$$x, \pi(x), \pi^2(x), \cdots$$
onde π^2 designa a composição $\pi \circ \pi$ e do mesmo modo π^j a composição $\pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi$ (j vezes), chama-se a órbita de x pela permutação π. Como $[n]$ é finito, qualquer órbita é também finita. Mais do que isso, como as permutações são bijecções, existe sempre um $k \leq n$ tal que $\pi^k(x) = x$ e portanto a órbita de x por π é um **ciclo**
$$(x, \pi(x), \cdots, \pi^{k-1}(x))$$
Num ciclo não importa qual o elemento que representamos como primeiro, mas apenas a ordem em que elementos ocorrem; portanto, por exemplo,
$$(\pi(x), \cdots, \pi^{k-1}(x), x)$$
representa o mesmo ciclo .

Dada π e $x, y \in [n]$, os ciclos de x e de y por π ou coincidem ou são disjuntos. Cada permutação tem portanto uma decomposição cíclica. Nos exemplos anteriores,
$$\pi = (0, 1, 3, 2, 4) \qquad \rho = (0, 2)(1)(3, 4)$$
Note-se que na representação de ρ acima não importa também a ordem por que apresentamos os ciclos; podemos igualmente representar $\rho = (3, 4)(1)(2, 0)$. É também natural omitir os ciclos de comprimento 1, ou seja os elementos em que a permutação actua como a identidade.

Esta representação de uma permutação como composição de ciclos pode (e deve) ser interpretada do seguinte modo: cada ciclo é de facto uma permutação de $[n]$ que actua como a identidade nos elementos que não pertencem ao ciclo, por exemplo, com $n = 5$
$$(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e cada permutação se pode obter como composição dos seus ciclos de maneira única, a menos da ordem dos ciclos, já que ciclos disjuntos comutam entre si.

Definição 1.2 *O **tipo cíclico** de uma permutação é a lista dos números de ciclos de cada comprimento. Representamos um tipo como* $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ *onde* α_i *é o número de ciclos de comprimento* i*.*

Os coeficientes α_k são não negativos e satisfazem a igualdade

$$\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k = n,$$

uma vez que a união (disjunta) de todos os ciclos de uma permutação é todo o conjunto $[n]$, e reciprocamente qualquer solução $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, em inteiros não negativos, desta igualdade, corresponde a um tipo cíclico.
Portanto os tipos cíclicos de S_n estão em bijecção com as partições de n em parcelas positivas, e o número de tipos cíclicos é $p(n)$.

Duas permutações π eρ dizem-se **conjugadas** se existe uma permutação τ tal que

$$\tau\pi = \rho\tau$$

ou seja se representam a mesma transformação a menos de uma "mudança de variáveis".
A relação de conjugação é uma relação de equivalência definida no grupo S_n (e mais geralmente em qualquer grupo).

Proposição 1.3 *: Duas permutações são conjugadas se e só se têm o mesmo tipo cíclico.*

Demonstração 1.4 *: Se* π *e* ρ *têm o mesmo tipo cíclico, podemos estabelecer uma bijecção entre os ciclos da primeira e os da segunda, tal que a*

um ciclo de comprimento m $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ de π correponda um ciclo do mesmo comprimento $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ de ρ. Definimos, em cada ciclo de π, $\tau(x_i) = y_i$. Verifica-se que τ é uma bijecção de $[n]$ nele próprio que conjuga π e ρ.
Para demonstrar a recíproca, provamos que o tipo de ciclo de $\sigma\pi$ é o mesmo que o de $\pi\sigma$, para quaisquer permutações π e σ; desse modo o tipo cíclico de $\rho = \tau\pi\tau^{-1}$ é o mesmo que o de $\tau^{-1}\tau\pi = \pi$.
Seja então $x_1, x_2, \cdots x_m$ um ciclo de comprimento m para $\sigma\pi$; temos portanto $\sigma\pi(x_i) = x_{i+1}$ para $1 \leq i < m$ e $\sigma\pi(x_m) = x_1$; além disso, $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$. Verificamos que $y_1, y_2, \cdots, y_m$, onde $y_i = \pi(x_i)$, é um ciclo de comprimento m para $\pi\sigma$, já que, para $i < m$, $\pi\sigma(y_i) = \pi\sigma\pi(x_i) = \pi(x_{i+1}) = y_{i+1}$ e $\pi\sigma(y_m) = \pi\sigma\pi(x_m) = \pi(x_1) = y_1$.
Estabelecemos assim uma bijecção entre ciclos de $\sigma\pi$ e ciclos de $\pi\sigma$ com o mesmo comprimento, pelo que estas duas permutações têm o mesmo tipo cíclico.

Definição 1.5 *: O número de Stirling de primeira espécie (sem sinal) $c(n,k)$ é o número de permutações de n elementos com k ciclos.*

$c(n,k)$ pode ser descrito como o número de modos de sentar n pessoas em k mesas redondas sem que nenhuma mesa fique vazia (para que esta descrição seja precisa, há que esclarecer que as mesas não se distinguem umas das outras e que é possível sentar até $n-k+1$ pessoas numa mesa).

Verifica-se facilmente que

$$k < 0 \vee k > n \implies c(n,k) = 0, \qquad c(n,1) = (n-1)!, \qquad c(n,n) = 1$$

Fixando um elemento a de $[n]$, uma permutação π com k ciclos ou tem a sozinho num ciclo ou não; o primeiro caso corresponde a uma permutação de $n-1$ elementos com $k-1$ ciclos, enquanto que o segundo se obtém de uma permutação de $n-1$ elementos com k ciclos intercalando a numa das $n-1$ posições possíveis. Deduzimos assim a seguinte:

Proposição 1.6 *Os números de Stirling de primeira espécie satisfazem a fórmula de recorrência*

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k)$$

Por outro lado, se fixarmos um tipo $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$, correspondendo a uma configuração

$$(\cdots)\cdots(\cdots)$$

de blocos ordenados por ordem de grandeza, temos $n!$ modos de distribuir os elementos pelos espaços; mas para cada ciclo de comprimento k há k escolhas diferentes de apresentação do ciclo como sequência ordenada; além disso, há $\alpha_k!$ maneiras de ordenar os ciclos de comprimento k. Em resumo,

Proposição 1.7 *O número de permutações de tipo* $[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ *é*

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n} \alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

1.2 Transposições e paridade de uma permutação

Uma permutação cíclica que só permuta dois elementos chama-se uma **transposição**. Qualquer permutação se pode representar como composição de transposições. Isso decorre do facto de qualquer ciclo se poder obter como composição de transposições; por exemplo:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_1, x_k)\cdots(x_1, x_i)\cdots(x_1, x_4)(x_1, x_3)(x_1, x_2)$$

Mas essa representação não é única. Por exemplo

$$(0,1,2,3,4) = (0,4)(0,3)(0,2)(0,1) = (0,3)(2,4)(3,4)(1,3)(2,3)(0,2)$$

Obtemos mais informação sobre essas representações, observando o efeito sobre o tipo de uma permutação π que resulta de a compor com uma transposição (a,b).

Se os elementos a e b pertencem ao mesmo ciclo de π, verificamos que na composição $(a,b)\pi$ esse ciclo é decomposto em dois:

$$(a, x, \cdots, y, b, w, \cdots, z) \to (a, x, \cdots, y)(b, w, \cdots, z)$$

Mas se em π os elementos a e b estão em ciclos diferentes, na composição $(a,b)\pi$ estes ciclos são ligados num só:

$$(a, x, \cdots, z)(b, w, \cdots, y) \to (a, x, \cdots, z, b, w, \cdots, y)$$

Ou seja, se π é uma permutação qualquer e τ uma transposição,

$$c(\tau\pi) = c(\pi) \pm 1$$

onde $c(\sigma)$ designa o número de ciclos da permutação σ:
se σ tem tipo

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n],$$

então

$$c(\sigma) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Suponhamos então que temos duas representações

$$\pi = \tau_k \tau_{k-1} \cdots \tau_1 = \rho_j \rho_{j-1} \cdots \rho_1$$

como composição de transposições.
Em cada uma delas começamos com a identidade que tem n ciclos e vamos compondo com as sucessivas transposições τ_i ou ρ_l o que vai aumentando ou diminuindo o número de ciclos numa unidade, até obtermos π; se designarmos por s_1 o número de vezes em que o número de ciclos aumentou e por d_1 o número de vezes em que diminuiu, na primeira representação, e por s_2 e d_2 os números de vezes em que o número de ciclos aumentou e diminuiu na segunda representação, temos

$$s_1 + d_1 = k, \qquad n + s_1 - d_1 = c(\pi)$$

$$s_2 + d_2 = j, \qquad n + s_2 - d_2 = c(\pi)$$

Mas então, fazendo a diferença membro a membro nas segundas igualdades, temos $s_1 - s_2 - d_1 + d_2 = 0$, pelo que

$$k - j = s_1 - s_2 + d_1 - d_2 = 2(s_1 - s_2) = 2(d_1 - d_2)$$

e concluímos que

Proposição 1.8 : *Uma permutação pode ser representada como composição de um número par de transposições ou como composição de um número ímpar de transposições, mas não de ambos. No primeiro caso dizemos que a permutação é par e tem sinal* 1*, e no segundo caso que é ímpar e tem sinal* -1*.*

Nota 1.9 : *Dada uma permutação* π *e uma transposição* τ *a matriz* $M_{\tau\circ\pi}$ *obtém-se de* M_π *por uma troca de duas linhas; portanto, se* π *é uma composição de transposições, a sua matriz* M_π *é o produto das matrizes dessas transposições e resulta de, começando com a matriz identidade, proceder a uma sucessão de trocas de linhas, tantas quantas as transposições na dita composição. Deduz-se desta observação que uma permutação par é representada por uma matriz de determinante* 1 *e uma permutação ímpar por uma matriz de determinante* -1*.*

Fixando uma transposição τ, a aplicação

$$\pi \to \tau\pi$$

define uma bijecção do conjunto das permutação pares no conjunto das permutação ímpares.
Conclui-se que no conjunto S_n de todas as permutações de n elementos, metade são pares e metade ímpares.

Exercícios VIII.1

1. Em quantas permutações $\pi \in S_n$ ($n > 2$) é que 1 e 2 pertencem ao mesmo ciclo? Quantas permutações têm exactamente dois ciclos?

2. Para um $k \leq n$ fixo qualquer,

   a) em quantas permutações $\pi \in S_n$ é que 1 pertence a um ciclo de comprimento k (abreviadamente, um k-ciclo)?

   b) quantas permutações $\pi \in S_n$ têm (pelo menos) um k-ciclo?

3. Quantas permutações $\pi \in S_n$ satisfazem a condição $\pi^5(x) = x \ \forall x \in [n]$? E se for $\pi 6(x) = x$?

4. Se $\pi \in S_n$ tem tipo cíclico $[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$, o que podemos dizer sobre o tipo cíclico de
$$\pi^k = \pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi, (k \text{ vezes})?$$

5. O sinal de uma permutação π de n elementos é definido como 1 se π é par e -1 se é ímpar.
   Mostrar que se π é do tipo $[i_1, i_2 \cdots i_n]$ então o sinal de π é $(-1)^{n+i_1+i_2+\cdots+i_n}$, ou seja, o sinal de uma permutação é igual a $(-1)^s$ em que s é o número de ciclos de comprimento par.

6. Definimos o polinómio em n variáveis
$$P(x_1, \cdots, x_n) = \Pi_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)\,,$$
   e, para cada $\pi \in S_n$,
$$P_\pi(x_1, \cdots, x_n) = \Pi_{1 \leq i < j \leq n}(x_{\pi(i)} - x_{\pi(j)}).$$

   a) Mostrar que $P_\pi = \pm P$.

   b) Mostrar que se π é uma transposição, $P_\pi = -P$.

   c) Concluir que a paridade de uma permutação π está bem definida e pode ser calculada como a paridade do número de inversões de π, ou seja, do número de pares (i, j) tais que $i < j$ e $\pi(i) > \pi(j)$.

1.3 Grupos de simetrias

Consideramos agora um outro tipo de representação de permutações de grande interesse.

Considere-se um triângulo equilátero com vértices $\{1, 2, 3\}$ fixo num plano. Uma rotação de $2\pi/3$ em torno do centro do triângulo, feita por exemplo no sentido dos ponteiros do relógio, dá lugar a uma permutação dos vértices, ou seja a um elemento de S_3. Se os vértices foram numerados também no sentido dos ponteiros do relógio, temos a permutação cíclica $\sigma = (1\,2\,3)$.
Por outro lado, se considerarmos a recta que une um dos vértices, por exemplo 1, ao ponto médio do lado oposto, a reflexão do plano sobre essa recta também se traduz numa permutação dos vértices, neste caso $\rho = (2\,3)$.

Verifica-se facilmente que existem 6 simetrias do triângulo, ou seja transformações do plano que levam o triângulo sobre ele próprio, que correspondem exactamente às 6 permutações dos vértices: a identidade, as rotações σ e σ^2 e as três reflexões (uma por cada vértice), que se podem representar apenas à custa de uma delas e de σ como $\rho, \rho\sigma, \rho\sigma^2$.

Se considerarmos agora um quadrado, com vértices numerados $\{1, 2, 3, 4\}$ no sentido dos ponteiros do relógio, verificamos que existem 8 simetrias a que correspondem mais uma vez outras tantas permutações dos vértices: a identidade, as rotações de $\pi/2$, π e $3\pi/2$ em torno do centro do quadrado que dão lugar respectivamente às permutações σ, σ^2 e σ^3 em que $\sigma = (1\,2\,3\,4)$; e dois pares de reflexões, umas sobre as rectas que unem os pontos médios de lados opostos e outras sobre as rectas que unem vértices opostos; as primeiras correspondem às permutações $(1\,2)(3\,4)$ e $(1\,4)(2\,3)$, e as outras a $(1\,3)$ e $(2\,4)$. Note-se que desta vez nem todas as permutações $\pi \in S_4$ são realizadas pelas simetrias do quadrado. No entanto as permutações induzidas por simetrias do quadrado constituem um **subgrupo** de S_4, uma vez que:

1. a permutação identidade é realizada por simetria (não mover o quadrado);
2. a inversa de uma permutação realizada por uma simetria também é realizada por uma simetria;
3. e a composição de simetrias corresponde à composição das permutações respectivas.

É um bom exercício criar uma tabela de composição deste subgrupo de permutações, verificando por exemplo que a composição de duas reflexões é uma rotação.

Os factos descritos generalizam-se para as simetrias de um polígono regular de n lados: além da identidade, temos rotações de $m2\pi/n$, com $1 \leq m < n$, em torno do centro; se n for par temos reflexões sobre cada uma das rectas ligando pares de lados opostos ou pares de vértice opostos, enquanto que se n for ímpar, temos reflexões sobre as rectas que unem cada vértice ao ponto médio do lado oposto.
A estas simetrias correspondem as respectivas permutações dos vértices que constituem um subgrupo com $2n$ elementos de S_n, o chamado **grupo diédrico ou diedral** D_n. Se representarmos a permutação induzida pela rotação de $2\pi/n$ por σ e uma qualquer das reflexões por ρ, verificamos que todos os elementos de D_n se podem representar por composição a partir destes dois:

$$D_n = \{\sigma, \sigma^2, \cdots, \sigma^{n-1}, 1 = \sigma^n, \rho, \rho\sigma, \cdots, \rho\sigma^{n-1}\}$$

É claro que as simetrias do polígono também induzem permutações dos lados do mesmo, de uma maneira completamente análoga ao que acontece com os vértices.

Outros subgrupos interessantes de grupos de permutações podem ser obtidos, por exemplo, através dos grupos de simetrias dos sólidos regulares, ou seja os sólidos com faces todas iguais a um dado polígono regular e em que cada vértice pertence ao mesmo número de arestas (e faces).
Deduzimos, como consequência da fórmula de Euler para grafos planares que existem apenas 5 sólidos regulares:

- o **tetraedro** com 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices;

- o **cubo** com 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices;

- o **octaedro** com 8 faces triangulares, 12 arestas e 6 vértices;

- o **dodecaedro** com 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices;

- e o **icosaedro** com 20 faces triangulares, 30 arestas e 12 vértices.

À excepção do tetraedro, as simetrias de cada sólido obtêm-se como rotações em torno de eixos unindo ou vértices opostos, ou pontos médios de arestas opostas , ou centros de faces opostas (note-se que estamos a considerar apenas as simetrias realizáveis no espaço tridimensional).
Cada uma dessas simetrias induz uma permutação quer dos vértices, quer das arestas, quer das faces do sólido. Estas permutações, ainda que induzidas pela mesma simetria, não têm que ser do mesmo tipo.

Exemplo 1.10 *: As simetrias do tetraedro são obtidas por rotação sobre um eixo unindo um vértice com o centro da face oposta ou por rotação sobre um eixo unindo os pontos médios de arestas opostas. Uma rotação de* $2\pi/3$ *sobre o eixo que passa pelo vértice a, realiza a permutação dos vértices* $(a)(b, c, d)$ *e uma permutação do mesmo tipo nas faces: fixa a face abc (identificando uma face pelo conjunto dos seus vértices) e permuta ciclicamente as outras três; a permutação induzida pela mesma simetria nas arestas tem dois ciclos de comprimento* 3*:* $(ab, ac, ad)(bc, cd, bd)$ *onde ab designa a aresta que une esses dois vértices; naturalmente, a mesma aresta pode ser representada por ba.*
Existem três pares de arestas opostas; consideremos um desses pares, em que uma das arestas tem vértices a, b *e a outra vértices* c, d*; uma rotação de* π *sobre o eixo respectivo induz uma permutação* $(a\,b)(c\,d)$ *no conjunto dos vértices; se identificarmos cada face com o conjunto dos seus vértices, a mesma rotação permuta a face acd com a face bcd e a face abc com a face abd. Verificamos portanto que os grupos de permutações dos vértices e das faces induzidas por rotações do tetraedro, se podem identificar um com o outro: cada rotação dá lugar a uma permutação cuja decomposição cíclica é constituída por duas transposições.*
A mesma rotação permuta a aresta ac com a aresta bd e a aresta ad com a bc, deixando fixas as arestas ab e cd. Ou seja obtemos uma permutação que

tem como decomposição cíclica duas transposições e dois pontos fixos (ciclos de comprimento 1*).*

Exemplo 1.11 *: O cubo (bem como os outros sólidos regulares) tem simetrias dos três tipos; usamos a figura anexa para descrever as diferentes simetrias e as permutações induzidas.*
Por cada par de faces opostas existe uma rotação de $\pi/2$ *em torno do eixo que une os centros dessas faces; se escolhermos por exemplo as faces* $abcd$ *e* $efgh$ *e escolhermos a rotação no sentido directo, temos a permutação de vértices*

$$(a,\, c,\, d,\, b)(e,\, g,\, h,\, f)$$

a permutação de arestas

$$(ab,\, ac,\, cd,\, bd)(ae,\, cg,\, dh,\, bf)(ef,\, eg,\, gh,\, fh)$$

e a permutação de faces

$$(abcd)(abef,\, aceg,\, cdgh,\, bdfg)(efgh).$$

As permutações de vértices, arestas e faces induzidas por uma rotação de π *em torno do mesmo eixo de simetria, deduzem-se facilmente das apresentadas atrás: isto porque, um ciclo de comprimento par* $2m$ *de uma permutação* α *qualquer se decompôe em dois ciclos de comprimento* m *para a permutação* $\alpha \circ \alpha$*, enquanto que um ciclo de comprimento ímpar de* α *dá lugar para* $\alpha \circ \alpha$ *a um ciclo do mesmo comprimento.*
Este é um caso particular da relação entre o tipo cíclico de uma permutação α *e os tipos cíclicos das suas potências* α^k *(ver exercícios).*

Por cada par de arestas opostas temos uma rotação de π *em torno do eixo que une os pontos médios dessas arestas. Escolhendo por exemplo as arestas* ab *e* gh*, obtemos a permutação de vértices*

$$(a,\, b)(c,\, f)(d,\, e)(g,\, h)$$

a permutação de arestas

$$(ab)(gh)(ac,\, bf)(ae,\, bd)(cd,\, ef)(cg,\, fh)(eg,\, dh)$$

e a permutação de faces

$$(abcd,\, abef)(aceg,\, bfdh)(cdgh,\, efgh)$$

Finalmente uma rotação de $2\pi/3$ em torno do eixo que une, por exemplo os vértices a e h, induz as permutações de vértices

$$(a)(h)(b,\, c,\, e)(f,\, d,\, g)$$

de arestas

$$(ab,\, ac,\, ae)(dh,\, gh,\, fh)(bd,\, cg,\, ef)(cd,\, eg,\, bf)$$

e de faces

$$(abcd,\, aceg,\, abef)(cdgh,\, efgh,\, bdfh)$$

Note-se que, embora as permutações de vértices , arestas ou faces sejam em geral diferentes, se conhecermos a permutação de vértices induzida por uma simetria, podemos deduzir a partir dela as respectivas permutações de arestas e faces.
Também é possível identificar as permutações (de vértices, arestas e faces) do octaedro com as permutações (respectivamente de faces, arestas e faces) do cubo. As simetrias do dodecaedro e do icosaedro estão relacionadas do mesmo modo.