1 Grafos planares

Definição 1.1 *: Um grafo G é **planar** se admite uma representação gráfica no plano $\mathbb{R}^2$ (designada por representação plana de G) na qual linhas que representam arestas diferentes não se intersectam - a não ser nos extremos, no caso das arestas serem incidentes num ou dois vértices comuns.*

Dada uma representação plana de G, identificamos as suas arestas e vértices com os segmentos e pontos que os representam; uma representação plana de G divide o plano em regiões (uma delas ilimitada) que designamos por faces. Essas regiões definem-se rigorosamente como sendo as componentes conexas (por arcos) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{representação plana deG}\}$ (ver comentário mais adiante). Por outro lado, a fronteira de cada face de uma representação plana de de G é um passeio fechado do grafo e cada ciclo do grafo resulta, na representação plana, na fronteira de uma união de faces.

Nota 1.2 *Um grafo é planar se e só se cada uma das suas componentes conexas o for.*
Um grafo é planar se e só se o subgrafo simples que resulta de eliminar todos os lacetes e identificar os conjuntos de arestas paralelas também o for.
*Um grafo H é uma **subdivisão** de G se for obtido deste introduzindo vértices em arestas de G, isto é, se u e v são adjacentes em G, criamos um novo vértice w e substituímos a aresta $u - v$ pelas arestas $u - w$ e $w - v$. Nestas condições G é planar se e só se H também o for.*
Dado um grafo G, seja G^o o subgrafo que se obtém eliminando sucessivamente os vértices de grau 1 e as arestas neles incidentes até não existirem vértices de grau 1. G é planar se e só se G^o o for.

Um grafo planar tem evidentemente muitas representações planas diferentes. Em particular, podemos escolher uma face qualquer numa representação planar e construir outra representação na qual essa é a face ilimitada. No entanto, o número de faces das representações planas de G é invariante:

Teorema 1.3 ***Fórmula de Euler***: *Se G é um grafo planar conexo com v vértices e a arestas e f é o número de faces numa sua representação plana, tem-se*

$$v - a + f = 2$$

Demonstração 1.4 : *Note-se antes do mais que a fórmula é válida para árvores (que são sempre planares): a representação plana de uma árvore tem uma única face e, neste caso, $v - a = 1$.*
Para o caso geral, a demonstração faz-se por indução no número a de arestas, sendo o caso $a = 1$ trivial de verificar. Suponha-se que a fórmula é válida para grafos planares conexos com m arestas e seja G um grafo planar conexo com $m+1$ arestas; se G for uma árvore não há nada a demonstrar; caso contrário, dada uma sua representação plana, elimine-se uma aresta que pertença a um ciclo; o grafo G' representado continua a ser conexo e tem menos uma aresta que G mas a sua representação plana tem também menos uma face que a de G. Usando a hipótese de indução aplicada a G', concluímos que a fórmula vale também para G.

1.1 Sólidos regulares

Esta fórmula vale também para os números de faces, arestas e vértices de um sólido poligonal convexo, e permite esclarecer porque existem exactamente 5 sólidos convexos regulares (os chamados sólidos platónicos).
Dado um sólido convexo com f faves, a arestas e v vértices, podemos obter uma representação planar de um grafo cujos vértices, arestas e faces correspondem aos vértices, arestas e faces do sólido. Isso pode fazer-se, por exemplo, por meio da projecção estereográfica: imaginemos o sólido contido no interior de uma esfera, e a projecção das suas arestas e vértices na superfície da esfera, feita a partir do centro da mesma; pousamos a esfera no plano de modo a que o "polo sul" seja o ponto de contacto e que nenhuma aresta (ou vértice) passe pelo "polo norte"; agora projectamos a superfície da esfera no plano, a partir do "polo norte".

Consideremos agora que o sólido é regular e seja p o número de lados e vértices de cada face; se contarmos o número de arestas face a face, como cada aresta é um dos lados de exactamente 2 faces, temos $f \times p = 2a$. Por outro lado, se contarmos as faces vértice a vértice, e se cada vértice pertence a r faces, temos $v \times r = f \times p$. Substituindo na fórmula de Euler

$$2 = v - a + f \implies 2 = \frac{fp}{r} - \frac{fp}{2} + f \implies \frac{p}{r} - \frac{p}{2} + 1 = \frac{2}{f} > 0$$

Dividindo por p obtemos

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

cujas soluções são

$r = 3$ e $p = 2$	$f = 4$, $a = 6$ e $v = 4$	(tetraedro);
$r = 3$ e $p = 4$	$f = 6$, $a = 12$ e $v = 8$	(cubo);
$r = 3$ e $p = 5$	$f = 12$, $a = 30$ e $v = 20$	(dodecaedro);
$r = 4$ e $p = 3$	$f = 8$, $a = 12$ e $v = 6$	(octaedro);
$r = 5$ e $p = 3$	$f = 20$, $a = 30$ e $v = 12$	(icosaedro).

1.2 Grafo dual e condições de planaridade

Seja G um grafo planar conexo. Uma vez que cada face de uma representação planar de um grafo corresponde a um passeio fechado do grafo, chamamos grau da face l, e usamos a notação $d(l)$, ao comprimento do passeio correspondente. Se somarmos os graus das faces, cada aresta é contada duas vezes, pelo que concluímos que

$$\sum d(l) = 2a,$$

onde a soma se faz sobre o conjunto das faces de uma qualquer representação planar de G e $a = |E_G|$ é o número das arestas do grafo.

Esta discussão e a fórmula que dela resulta pode ser feita mais precisamente usando a noção de grafo dual: dada uma representação plana de G, define-se o grafo dual G^* do seguinte modo: por cada face da representação de G existe

um vértice de G^*; por cada aresta a de G existe uma aresta de G^* que incide nos vértices correspondendo às faces de G que têm a contida na sua fronteira. Note-se que G^* não é em geral um grafo simples: por exemplo, se a for uma aresta contida na fronteira de uma única face (o que acontece se e só se a não pertence nenhum caminho fechado em G), a aresta correspondente de G^* é um lacete no vértice de G^* respectivo. E se a fronteira comum de duas faces contém várias arestas, os respectivos vértices em G^* são ligados pelo mesmo número de arestas.
Importa notar que o grafo dual depende não apenas de G mas também da representação plana escolhida: duas representações planas do mesmo grafo podem ter duais não isomorfos.

A igualdade $\sum d(l) = 2a$ é portanto apenas o resultado, obtido no início desta introdução à Teoria dos Grafos, que diz que a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, mas aplicado ao grafo dual da representação plana.

Nota 1.5 *Em toda esta discussão, estamos a usar informalmente termos como "lado", "interior" ou "exterior" de uma face. Para formalizarmos estas noções introduzimos algumas definições:*

Definição ***1.6*** *Uma linha simples em $\mathbb{R}^n$ é a imagem de uma função contínua injectiva $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Os pontos $f(0)$ e $f(1)$ são os extremos da linha.*
Uma linha simples fechada é a imagem de uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(0) = f(1)$ e a restrição de f a $]0,1[$ é injectiva.

Definição ***1.7*** *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por arcos se para todos os $x, y \in X$ existe uma linha simples com extremos x e y contida em X.*

Dito isto, existe o Teorema seguinte (de demonstração menos simples do que se possa supor...)

Teorema ***1.8 (Jordan)*** *Qualquer linha simples fechada C em $\mathbb{R}^2$ decompôe $\mathbb{R}^2 \setminus C$ na união disjunta de duas regiões não vazias e conexas por arcos.*

Em bom rigor, o Teorema de Jordan não é inteiramente necessário para considerarmos as representações planas de grafos, uma vez que se pode provar que qualquer grafo simples e planar tem uma representação no plano em que as arestas são segmentos de reta. Portanto as faces limitadas da representação são polígonos e nesse caso é mais fácil formalizar a ideia intuitiva de inteiror e exterior.

Suponhamos agora que G é planar, conexo, simples com v vértices, $a > 1$ arestas e f faces. Designando por F o conjunto das faces, e como cada face tem grau pelo menos 3

$$3f \leq \sum_{l \in F} d(l) = 2a;$$

substituindo na fórmula de Euler, obtemos

$$2 = v - a + f \leq v - a + \frac{2}{3}a$$

ou seja:

Proposição 1.9 *Se G é planar, conexo, simples com $v > 2$ vértices e a arestas, então*

$$a \leq 3v - 6.$$

Corolário 1.10 *: O grafo K_5 não é planar.*

Uma generalização do mesmo argumento permite deduzir

Corolário 1.11 *O grafo $K_{3,3}$ não é planar.*

Demonstração 1.12 *O menor ciclo de $K_{3,3}$ tem comprimento 4. Se este grafo fosse planar, dada uma sua representação plana teríamos $4f \leq 2a$ e portanto, repetindo o cálculo anterior,*

$$a \leq 2v - 4$$

Mas $v = 6$ e $a = 9$, o que conduz a uma contradição.

Estes dois exemplos são de facto fundamentais, como se verá a seguir.

1.3 Teoremas de Kuratowski e Wagner

Se alterarmos um grafo G subdividindo uma aresta com um novo vértice, obtemos um novo grafo que se chama uma subdivisão de G; mais geralmente, designa-se **subdivisão de um grafo** G a um grafo que resulte daquele pela repetição dessa operação.

É evidente que um grafo é planar se e só se qualquer sua subdivisão o for. Conclui-se portanto que se um grafo é planar não pode conter como subgrafo uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$. Um notável teorema devido a Kuratowski, diz-nos que esta condição é também suficiente:

Teorema 1.13 *(Kuratowski): Um grafo é planar se e só se não contém como subgrafo uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$.*

Um resultado semelhante baseia-se na noçãde menor de um grafo:

Definição 1.14 *Um **menor** de um grafo G é um grafo que se pode obter de G através de uma sucessão de eliminação de vértices, e eliminação ou contracção de arestas.*

Teorema 1.15 (Wagner) *Um grafo é planar se e só se não tiver como menor nem K_5 nem $K_{3,3}$*

Prova-se que de facto os Teoremas de Kuratowski e Wagner são equivalentes, uma vez que um grafo contém como subgrafo uma subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$ se e só se tiver esse grafo como menor.

Exercícios

1. Mostrar que se G é um grafo conexo planar com n vértices e m arestas e em que o menor ciclo tem comprimento k, então

$$m \leq k\frac{n-2}{k-2}$$

   Concluir que $Pet(2)$ (ver exercício IX.1.9) não é planar.

2. Mostrar que o grafo complementar de um grafo simples planar com $n \geq 11$ vértices, não é planar.
3. Justificar que se G é um grafo simples planar conexo e $\delta(G) = 5$, então G tem pelo menos 12 vértices de grau mínimo.
4. Mostrar que se um grafo planar G é isomorfo ao seu dual então $|E_G| = 2(|V_G - 1)$.
5. Mostrar que o grafo $Pet(2)$ tem K_5 como menor.