0.1 Números multinomiais

$\binom{n}{k}$ é o número de maneiras de repartir um $n-$conjunto X em dois subconjuntos X_1 e X_2, o primeiro com k e o segundo com $n-k$ elementos.
Note-se a distinção entre os dois subconjuntos que é necessária quando $n = 2k$. Por exemplo, se $X = \{a, b, c, d\}$, as partições

$$X_1 = \{a, b\}, X_2 = \{c, d\}$$

e

$$X_1 = \{c, d\}, X_2 = \{a, b\}$$

são contadas como diferentes.

Generalizando, de quantas maneiras podemos repartir os elementos de X em subconjuntos $X_1, \cdots, X_r$ de modo a que $|X_i| = k_i$?
Podemos escolher os elementos de X_1 de $\binom{n}{k_1}$ maneiras, em seguida os de X_2 de $\binom{n-k_1}{k_2}$ maneiras e assim por diante. Deduzimos que a resposta é o número multinomial

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\cdots k_{r-1}}{k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

Note-se mais uma vez que a ordem dos conjuntos X_i é tida em linha de conta.

Exemplo 0.1 *De quantas maneiras podemos dividir* 25 *pessoas por duas equipas de* 7*, uma de* 6 *e outra de* 5 *para trabalharem em quatro projectos diferentes? A resposta é*

$$\binom{25}{5, 6, 7, 7} = \frac{25!}{5!6!7!7!}$$

No entanto, se as equipas forem trabalhar todas no mesmo projecto a resposta passa a ser $\frac{1}{2}\binom{25}{5, 6, 7, 7}$ *uma vez que é indiferente a ordem por que consideramos os dois grupos de* 7 *pessoas.*

Exemplo 0.2 *De quantas maneiras podemos ordenar* 7 *bolas azuis,* 6 *bolas brancas e* 5 *bolas verdes? Numa fila com* 18 *lugares, escolhemos as* 7 *posições das bolas azuis de* $\binom{18}{7}$ *modos possíveis e em seguida escolhemos de entre as* 11 *posições vagas, as* 6 *das bolas brancas de* $\binom{11}{6}$ *modos possíveis. O resultado é que há*

$$\binom{18}{7}\binom{11}{6} = \frac{18!}{7!6!5!} = \binom{18}{7, 6, 5}$$

ordens possíveis.

Note-se que se tivermos 7 *bolas azuis,* 6 *bolas brancas e* 6 *bolas verdes para ordenar, o resultado é* $\binom{19}{7, 6, 6}$*, e não* $\frac{1}{2}\binom{19}{7, 6, 6}$*, uma vez que trocar as posições das bolas brancas com as das verdes cria uma ordenação diferente.*

Tal como no caso dos números binomiais, os números multinomiais podem ser gerados pela expansão algébrica de um polinómio em r variáveis:

Teorema 0.3

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}$$

em que

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}$$

e a soma é feita sobre todos os valores (não negativos) de $k_1, k_2, \cdots, k_r$*, tais que*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

Demonstração 0.4 *Podemos demonstrar a igualdade, à semelhança do caso do Teorema do binómio, justificando que ao desenvolver o lado esquerdo como soma de monómios da forma* $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r}$*, este monómio ocorre tantas vezes quantas as maneiras de escolher* k_1 *factores para contribuir com um* x_1*,* k_2 *factores para contribuir um* x_2*, etc.*

Exercício *0.5* *Em alternativa, demonstrar o teorema por indução em* r*, assumindo como verdadeiro o Torema do Binómio, ou seja, o caso* $r = 2$*.*

Exemplo 0.6 *Qual o coeficiente de* x^{10} *no polinómio* $p(x) = (1 + x + x^2)^{52}$*?*
Usando o teorema (identificando 1*,* x *e* x^2 *com variáveis* x_1, x_2, x_3*)*

$$(1 + x + x^2)^{52} = \sum_{k_1, k_2, k_3} \binom{52}{k_1, k_2, k_3} 1^{k_1} x^{k_2} (x^2)^{k_3} = \sum_{k_1, k_2, k_3} \binom{52}{k_1, k_2, k_3} x^{k_2 + 2k_3},$$

onde a soma se faz sobre todos os k_1, k_2, k_3*, não negativos, tais que* $k_1 + k_2 + k_3 = 52$*.*
Para sabermos o coeficiente de x^{10}*, temos que somar os números multinomiais em que* $k_2 + 2k_3 = 10$*. Como*

$$k_1 = 52 - k_2 - k_3 = 52 - (10 - 2k_3) - k_3 = 42 + k_3,$$

podemos usar k_3 *como parâmetro e obtemos (designando* k_3 *apenas por* k*)*

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{52}{k, 10 - 2k, 42 + k} = 74993207380.$$

Este exemplo pode ser interpretado como respondendo à pergunta: se retirarmos 10 *cartas de dois baralhos idênticos (cada um com* 52 *cartas), quantos conjuntos diferentes se podem obter?*

0.1.1 Multiconjuntos

Os números multinomiais foram interpretados nos exemplos acima de duas maneiras: $\binom{n}{k_1,k_2,\cdots,k_r}$ representa

- o número de maneiras de decompor um conjunto com n elementos numa união disjunta de subconjuntos com cardinalidades $k_1, k_2, \cdots, k_r$;
- o número de maneiras de ordenar k_1 cópias de um elemento A_1, k_2 cópias de um elemento A_2, etc.

Esta segunda interpretação justifica a definição de **Multiconjunto**: informalmente, um multiconjunto é apenas um conjunto com elementos repetidos; por exemplo, $\{1, 1, 2, 2, 2, 4\}$ é um multiconjunto com elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Mais formalmente, tal como um subconjunto de X se identifica com uma função $f : X \to \{0, 1\}$, podemos identificar um multiconjunto com uma função $f : X \to \mathbb{N}$ em que $f(x)$ nos dá o número de ocorrências de x no multiconjunto. Se

$$\sum_{x\in X} f(x) = k$$

dizemos que f define um $k-$multiconjunto com elementos de X.
Temos portanto que o número de $k-$multiconjuntos com elementos de $[n]$ é $\binom{n+k-1}{k}$.

Exercício 0.7 *Justificar esta última fórmula do seguinte modo: um $k-$multiconjunto com elementos em $[n]$ corresponde a uma sucessão (a_i) (em que $1 \le i \le k$) satisfazendo*

$$1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le n;$$

Associamos a (a_i) o $k-$subconjunto de $[n + k - 1]$

$$\{a_1, a_2 + 1, \cdots , a_k + k - 1\}.$$

Resta verificar que temos uma bijecção entre os $k-$multiconjuntos com elementos em $[n]$ e os $k-$subconjuntos de $[n + k - 1]$.

0.2 Princípio do Pombal

Até aqui considerámos apenas problemas de contagem. Existe um tipo diferente de problemas em que o que está em causa é determinar qual é o número mínimo de elementos que um conjunto tem que ter para que certa propriedade se verifique. O exemplo mais elementar que se pode dar é o seguinte:
suponhamos que queremos distribuir n bolas por k caixas e queremos garantir que pelo menos uma das caixas fica com mais do que uma bola. Evidentemente, a condição para que isso aconteça é que $n > k$.
Dito de outro modo, temos o seguinte

Princípio do Pombal: Se X e Y são conjuntos **finitos** e $|X| > |Y|$, então não existe qualquer função $f : X \to Y$ **injectiva**.
Mais geralmente, se $f : X \to Y$ e $|X| > k|Y|$, então existe algum $y \in Y$ tal que $|f^{-1}(y)| > k$.

Apesar da sua simplicidade, este princípio tem aplicações inesperadas.

Exemplo 0.8 *Dados* 5 *pontos do plano com coordenadas inteiras, existe pelo menos um par deles para o qual o segmento de recta que os une contém outro ponto de coordenadas inteiras.*

Se os 5 *pontos têm coordenadas* (x_i, y_i) *(com* $1 \leq i \leq 5$*) e considerarmos os pares ordenados*

$$(x_i \mod 2, y_i \mod 2)$$

verificamos imediatamente que, uma vez que só há quatro resultados possíveis, existem índices $i \neq j$ *para os quais*

$$x_i \equiv x_j \mod 2 \qquad y_i \equiv y_j \mod 2$$

e então o ponto médio desses dois pontos

$$\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$$

terá coordenadas inteiras.

Os dois exemplos que se seguem são mais complicados.

Exemplo 0.9 *Dado* n*, seja* $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ *uma sucessão de números diferentes entre si. Então existe uma subsucessão monótona de comprimento* $n + 1$*.*

Para verificar que é de facto assim, chamemos b_i *ao comprimento da maior subsucessão decrescente com último termo* a_i*; se* $b_i \geq n + 1$ *para algum* i*, não há nada a demonstrar; caso contrário, tem que haver* $n + 1$ *valores iguais, ou seja existem* $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{n+1}}$ *termos (com* $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$*) tais que a maior subsucessão decrescente terminando em qualquer deles tem comprimento* b*. Mas então concluímos que*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_{n+1}}$$

(porque, se $a_{i_j} > a_{i_{j+1}}$*, como existe uma subsucessão decrescente de comprimento* b *com último termo* a_{i_j}*, acrescentando-lhe* $a_{i_{j+1}}$ *obtemos uma subsucessão decrescente, de comprimento* $b+1$*, com último termo* $a_{i_{j+1}}$*) e temos portanto uma subsucessão crescente de comprimento* $n + 1$*.*

Exemplo 0.10 *Este exemplo envolve uma aplicação do princípio do pombal a uma área diferente: dado um irracional* α*, é claro que existem racionais tão próximos de* α *quanto desejarmos, mas para obtermos aproximações cada vez melhores temos que escolher racionais com denominador cada vez maior; mais precisamente, se fixarmos um natural* Q *e considerarmos o conjunto dos racionais com denominador menor ou igual a* Q*, existe um, e um só, deles que está a uma distância mínima* $d(Q)$ *de* α*. Portanto, se quisermos uma aproximação racional de* α *com erro inferior a* $d(Q)$ *temos que usar racionais com denominador maior que* Q*.*
Como a distância entre dois racionais consecutivos com denominador menor ou igual a Q *é sempre menor ou igual a* $1/Q$*, vemos que* $d(Q) < 1/(2Q)$ *e portanto para obter uma aproximação racional de* α *com erro inferior a* δ*, podemos escolher entre os racionais com denominador menor ou igual a* Q *com* $Q > 1/(2\delta)$*.*

O resultado seguinte diz-nos que de facto podemos obter uma aproximação p/q *com erro inferior a* δ *desde que* $q > \sqrt{1/\delta}$*. Assim, enquanto que pelo raciocínio anterior, para garantir uma aproximação com erro inferior a* 10^{-4} *teríamos que considerar racionais com denominador até* 5000*, o teorema seguinte garante a existência de uma aproximação dessa ordem com denominador menor ou igual a* 100*.*

Teorema *0.11* *Se α é irracional e $Q \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um racional p/q com $1 \leq q \leq Q$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ} \leq \frac{1}{q^2}$$

Demonstração *0.12* *Podemos evidentemente supôr que α está no intervalo $[0,1]$. Considerem-se as partes fraccionárias dos $Q+1$ números*

$$\alpha, 2\alpha, \cdots, (Q+1)\alpha$$

Se dividirmos o intervalo $[0,1]$ nos n subintervalos

$$[0, 1/Q], [1/Q, 2/Q], \cdots, [(Q-1)/Q, 1]$$

concluímos que existem duas daquelas partes fraccionárias que ficam no mesmo subintervalo; concretamente, existem $1 \leq q_1 < q_2 \leq Q+1$ e inteiros p_1 e p_2 (que são as partes inteiras, respectivamente, de $q_1\alpha$ e $q_2\alpha$) tais que

$$|\ (q_2\alpha - p_2) - (q_1\alpha - p_1)\ | < 1/Q$$

Designando $q = q_2 - q_1$ e $p = p_2 - p_1$, obtemos

$$|q\alpha - p| < 1/Q \Rightarrow |\alpha - p/q| < 1/(qQ)$$

e como $q \leq Q$ temos a desigualdade final.

1 Distribuições, partições e funções

Deduziu-se já que o número de maneiras de fazer k escolhas, com (possível) repetição e sem ordem, num n-conjunto, é dado por $\binom{n+k-1}{k}$.
Podemos também interpretá-lo, como vimos, como o número de modos de distribuir k bolas, todas iguais, por n caixas diferentes. Se as escolhas forem sem repetição, elas podem ser interpretadas igualmente como distribuições injectivas de bolas em caixas, ou seja, em que cada caixa não recebe mais do que uma bola.

Do mesmo modo, o número de maneiras de fazer k escolhas, com ordem (sem ou com repetição) num n-conjunto, pode ser identificado com o número de maneiras de distribuir (de forma injectiva ou não) k bolas distintas por n caixas distintas.

Esta analogia leva a que classifiquemos então diversos problemas de contagem com recurso a essa imagem concreta, de acordo com o quadro seguinte.

Distribuições ("bolas em caixas"):

		todas	injectivas	sobrejectivas
k bolas $\neq$	n caixas $\neq$	n^k	$n^{\underline{k}}$	$n!S(k,n)$
k bolas $\neq$	n caixas $=$	$\sum_{i=1}^{n} S(k,i)$	$\begin{array}{ll} 1 & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{array}$	$S(k,n)$
k bolas $=$	n caixas $\neq$	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{k-1}{k-n}$
k bolas $=$	n caixas $=$	$\sum_{i=1}^{n} p_i(k)$	$\begin{array}{ll} 1 & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{array}$	$p_n(k)$

$S(k,n)$ e $p_n(k)$ designam-se, respectivamente, **números de Stirling de segunda espécie** e números de partição.
A introdução destas novas notações para identificar operações de contagem sugere que esses números não se representam de forma simples à custa de outros já conhecidos, como os números binomiais ou multinomiais.
Analisaremos a seguir mais em pormenor as propriedades mais imediatas destes números.
No fim desta secção, faremos a interpretação sistemática das várias entradas do quadro em termos de funções

$$f : [k] \to [n].$$

1.0.1 Partições de um conjunto e Números de Stirling de segunda espécie

Definição 1.1 : *Uma n-partição de um conjunto X é uma família de subconjuntos $X_1, X_2, \cdots, X_n$ não vazios tais que*

$$X_i \cap X_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$$

É evidente que cada distribuição sobrejectiva de k bolas distintas por n caixas iguais corresponde exactamente a uma n-partição de $[k]$ e reciprocamente, e portanto

Definição 1.2 : *O número de n-partições de um k-conjunto designa-se número de Stirling de segunda espécie $S(k,n)$.*

O número de distribuições de k bolas distintas por n caixas iguais, sem a restrição de não haver caixas vazias, é igual ao número de distribuições em que se usam j caixas com j a variar entre 1 e n, e é portanto igual a $\sum_{j=1}^{n} S(k,j)$. Obviamente, $S(k,n) = 0$ se $n > k$; $\sum_{i=1}^{k} S(k,i)$, que conta todas as partições de um $k-$conjunto, tem a designação de **Número de Bell** e a notação $Bell(k)$.

Alguns factos básicos:

Lema 1.3 *Se $k > 0$ e $n \leq 0$, $S(k,0) = 0$; se $n > 0$ e $k \leq 0$, $S(0,n) = 0$; $S(0,0) = 1$;*

$S(k,1) = S(k,k) = 1$;

$S(k,k-1) = \binom{k}{2}$;

Para justificar a última igualdade, note-se que se temos uma partição de um k-conjunto em $k-1$ subconjuntos, um deles tem 2 elementos enquanto que todos os outros têm apenas 1. Portanto $S(k,k-1)$ é o número de maneiras de escolher os dois elementos que ficam juntos.

Nota 1.4 *O valor $S(0,0) = 1$ (há uma única maneira de distribuir zero bolas por zero caixas que é não fazer nada...) pode ser justificado mais formalmente notando que existe uma única função $f : \emptyset \to \emptyset$, que é ela própria o conjunto vazio, e que essa função deve ser considerada sobrejectiva (não existe nenhum valor no contradomínio que ela não assuma!)*

Exemplo 1.5 *Podemos calcular directamente $S(k,2)$: das 2^k maneiras de decompor um k-conjunto X na união disjunta de dois conjuntos A e B, temos que excluir os casos $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$; além disso (as caixas são iguais...) uma decomposição identifica-se com a contrária: se $X = \{0,1,2,3,4,5\}$,*

$$A = \{0,1,2\}, B = \{3,4,5\}, \qquad A = \{3,4,5\}, B = \{0,1,2\}$$

são a mesma partição de X.
Portanto $S(k,2) = \frac{2^k-2}{2} = 2^{k-1} - 1$.
Esta última expressão pode também ser justificada assim: se fixarmos um elementos $x \in X$, escolhemos um subconjunto não vazio $A \subset X \setminus \{x\}$ e juntamos x ao seu complementar para formar o subconjunto B.

Para calcular $S(k,3)$, podemos escolher um j-subconjunto (não vazio e que não seja o conjunto todo) A e depois decompor o complementar em dois subconjuntos não vazios B e C, usando a fórmula anterior; obtemos

$$\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} (2^{k-j-1} - 1).$$

Mas esta fórmua ainda não é o que queremos porque distinguimos um primeiro *subconjunto: por exemplo, com o mesmo X anterior, as partições*

$$A = \{0\}, B = 1, C = \{2,3,4,5\}, \qquad A = \{1\}, B = 0, C = \{2,3,4,5\}$$

são contadas como diferentes.
Mas é fácil ver que cada partição de X em três subconjuntos não vazios é contada exactamente 3 vezes na fórmula (uma por cada dos subconjuntos).

Um resultado bem mais importante é a seguinte:

Proposição 1.6 *: Os números de Stirling de segunda espécie satisfazem a fórmula de recorrência*

$$S(k,n) = S(k-1,n-1) + nS(k-1,n), \ \forall k > 0, \forall n \leq k$$

Demonstração 1.7 *Deduzimos este resultado considerando um k-conjunto X, um elemento $x \in X$ e separando as n-partições de X em dois casos: se x fica sozinho num subconjunto, os restantes $k-1$ elementos têm que ser divididos por $n-1$ subconjuntos e existem portanto $S(k-1,n-1)$ partições em que x fica sozinho; por outro lado, fazer uma n-partição de X em que x não fica sozinho é o mesmo que fazer uma n-partição de $X \setminus x$, o que se pode fazer de $S(k-1,n)$ maneiras, e escolher depois em qual dos n subconjuntos fica x, o que nos dá a segunda parcela.*

Esta fórmula permite construir facilmente um quadro com os valores de $S(k,n)$ para valores pequenos das variáveis, semelhante ao triângulo de Pascal para os números binomiais:
na tabela abaixo, as linhas correspondem aos valores de k e as colunas aos de n; omitiram-se, para maior clareza de leitura, os valores 0 que ocorrem acima da diagonal.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Note-se que, tal como acontece nas linhas dos triângulo de Pascal, se excluirmos os valores nulos, cada linha começa e termina com $S(k,1) = S(k,k) = 1$ e é, além disso, uma sequência unimodal: é constituída por um segmento inicial crescente até atingir um valor máximo e por um segmento decrescente. No entanto, está ausente a simetria bem conhecida dos números binomiais: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Uma outra observação fundamental é

Proposição 1.8 *: O número de funções* sobrejectivas *de um k-conjunto num n-conjunto é dado por $n!S(k,n)$.*

Demonstração 1.9 *: Uma função $f : [k] \to [n]$ sobrejectiva determina uma n-partição de $[k]$*

$$X_1, X_2, \cdots, X_n$$

em que

$$X_i = \{x \in [k] : f(x) = i\}$$

E duas funções sobrejectivas f e g dão lugar à mesma n-partição se houver uma bijecção $\sigma : [n] \to [n]$, tal que $g = \sigma \circ f$. Como existem $n!$ bijecções de $[n]$, temos a igualdade.

Usamos esta interpretação dos números de Stirling de segunda espécie para calcular $S(k,2)$ e $S(k,3)$:

Uma função sobrejectiva $f : [k] \to [2]$ fica completamente determinada pela escolha de um subconjunto $S \subset [k]$ não vazio e de complementar não vazio de modo a que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ \\ 1 & \text{se } x \in [k] \setminus S \end{cases}$$

Como há $2^k - 2$ subconjuntos S nessas condições, concluímos da proposição anterior que $S(k, 2) = 2^{k-1} - 1$.

Para contar as funções sobrejectivas $f : [k] \to [3]$, podemos proceder contando as não sobrejectivas: existem 3 funções cuja imagem consiste num único elemento; para cada escolha de dois elementos em $[3]$, existem, como vimos no caso anterior, $2^k - 2$ funções $f : [k] \to [3]$ cuja imagem consiste nesse dois elementos; como podemos escolher estes de $\binom{3}{2}$ maneiras, existem $\binom{3}{2}(2^k - 2)$ funções $f : [k] \to [3]$ cuja imagem conté exactamente dois elementos. Existem ao todo 3^k funções logo o número de funções sobrejectivas $f : [k] \to [3]$ é

$$3^k - 3 - \binom{3}{2}(2^k - 2)$$

e portanto

$$S(k, 3) = \frac{3^{k-1} - 1}{2} - (2^{k-1} - 1)$$

É em princípio possível generalizar esta ideia e, para cada n, encontrar uma fórmula para $S(k, n)$. No entanto não temos uma fórmula fechada (ou seja sem recorrências), dependente apenas de k e n.
O melhor que podemos obter é uma fórmula que nos dá $S(k, n)$ como um somatório. Essa fórmula será deduzida como aplicação de um dos princípios fundamentais da combinatória enumerativa, o Princípio da Inclusão-Exclusão.

1.0.2 Partições de um número

Designamos por $p_n(k)$ o número de maneiras de distribuir k bolas iguais por n caixas, também iguais entre si, sem deixar qualquer caixa vazia.

Uma vez que no caso da quarta linha do quadro, não há distinção entre bolas nem entre caixas, cada distribuição sobrejectiva é totalmente caracterizada pelos números de bolas das diversa caixas, não interessando a ordem destas. Podemos então colocar estes n números positivos, cuja soma é k, por uma ordem (por exemplo, não decrescente) e concluir que $p_n(k)$ é o número de soluções em inteiros de

$$x_1 + \cdots x_n = k, \qquad x_i > 0, \qquad x_1 \leq \cdots \leq x_n$$

ou seja, do seguinte sistema de uma equação e n inequações

$$\begin{cases} x_1 + \cdots x_n = k \\ 0 < x_1 \\ x_1 \leq x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \leq x_n \end{cases}$$

Portanto, $p_n(k)$ é o número de partições não ordenadas de k em parcelas positivas. E exactamente porque não nos interessa a ordem, podemos representá-las sempre em ordem não decrescente.
Temos, por exemplo, $p_3(7) = 4$, notando que as soluções nesse caso são

$$\begin{array}{c} 1+1+5 \\ 1+2+4 \\ 1+3+3 \\ 2+2+3 \end{array}$$

Apesar da equação

$$x_1 + \cdots x_n = k, \qquad x_i > 0$$

ter sido resolvida no caso geral de forma muito simples, não existe para $p_n(k)$ uma fórmula com grau de simplicidade sequer comparável.
Alguns factos de verificação imediata a partir da definição:

Lema 1.10 *1. se $k < n$ então $p_n(k) = 0$ (aplicando o princípio do Pombal);*

2. $p_1(k) = 1$ para todo o $k > 0$;

3. $p_k(k) = p_{k-1}(k) = 1$ para todo o $k > 0$.

Definimos igualmente $p(k) = \sum_{n=1}^{k} p_n(k)$.

Os números de partição serão tema para uma Ficha Complementar.

Exercícios VI 3.

1. Mostrar que os números de Stirling de segunda espécie satisfazem a recorrência

$$S(k+1, n) = \sum_{j=n-1}^{k} \binom{k}{j} S(j, n-1)$$

2. Mostrar que, para todo o m,

$$m^k = \sum_{j=0}^{m} S(k, j) m^{\underline{j}}$$

Sugestão: O lado esquerdo da igualdade representa o número de funções de $[k]$ em $[m]$. Classificar essas funções em função do número de elementos da sua imagem $A \subset [m]$.

3*. Mostrar por indução que para cada n a sequência $S(n,1), S(n,2), \cdots, S(n,n)$ é unimodal: existe $j(n)$ tal que

(a) $S(n, r-1) < S(n, r)$ se $1 < r \leq j(n)$;
(b) $S(n, j(n)) \geq S(n, j(n)+1)$;
(c) $S(n, r) > S(n, r+1)$ se $r > j(n)$;
(d) Além disso $j(n+1) = j(n)$ ou $j(n+1) = j(n)+1$.

3.

1.0.3 Distribuições e funções

Adaptando a linguagem das funções, dissemos que uma distribuição é injectiva se nenhuma caixa fica com mais que uma bola, e sobrejectiva se não ficam caixas vazias.
E chamou-se igualmente a atenção para o facto de que as distribuições com bolas diferentes por caixas distintas (primeira linha do quadro) se identificam exactamente com funções $f : [k] \to [n]$. Verificamos agora que os outros tipos de distribuições se podem por sua vez identificar com **classes de equivalência** daquelas funções.
Considere-se a segunda linha; se colocarmos provisoriamente etiquetas nas caixas temos de novo o caso da primeira linha; quando é que duas funções f e g se identificam ao retirarmos as etiquetas? Isso acontece se e só se existir uma bijecção $\pi : [n] \to [n]$ tal que $g = \pi \circ f$. É evidente que isto define uma relação de equivalência:

1. A relação é reflexiva: para toda a funccão $f : [k] \to [n]$, $f = \iota \circ f$, onde ι designa a bijecção identidade de $[n]$.
2. A relação é simétrica: se $g = \pi \circ f$ então $f = \pi^{-1} \circ g$.
3. A relação é transitiva: se $g = \pi \circ f$ e $h = \sigma \circ g$ então $h = (\sigma \circ \pi) \circ f$.

Note-se que se f e g são equivalentes por esta relação, g é injectiva se e só se f o for e o mesmo se passa quanto à sobrejectividade. Podemos portanto interpretar cada distribuição de k bolas distintas por n caixas iguais como uma classe de equivalência, para a relação definida acima, de funções de $[k]$ em $[n]$.

Do mesmo modo, as distribuições da terceira linha do quadro podem ser identificadas com classes de equivalência de funções, desta vez para a relação definida por: f e g são equivalentes se existe uma bijecção $\tau : [k] \to [k]$ tal que $g = f \circ \tau$.

E, finalmente, as distribuições da última linha identificam-se como classes de equivalência de funções para a relação definida por: f e g são equivalentes se existem bijecções

$$\pi : [n] \to [n], \qquad \tau : [k] \to [k]$$

tais que

$$g = \pi \circ f \circ \tau$$

Se soubéssemos compreender exactamente como estas diversas relações de equivalência identificam funções umas com as outras, poderíamos deduzir fórmulas para todas as linhas a partir das da primeira. Foi isso aliás que fizémos na dedução de $S(k, n)$ a partir do número de funções de $[k]$ em $[n]$ sobrejectivas; o que se passa nesse caso é que a primeira relação de equivalência junta exactamente $n!$ funções em cada classe de equivalência.
Infelizmente, a situação nos outros casos não é tão simples. Voltaremos a este problema de, dada uma certa relação de equivalência num conjunto, contar as classes de equivalência, noutro ponto do curso.