Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - v1 - 11h30 - 06 de junho de 2016
Duração: 1h30m

Resolução abreviada

[3.0] 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por

$$f(x,y) = \Big(x^2\log(1+y^2) + 2xy, \cos(x-y-1) + \mathrm{e}^{x+y-1}\Big)$$

Prove que f tem uma inversa local de classe C^1 numa vizinhança de $(1,0)$. Sendo $f^{-1}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ essa inversa, determine $\dfrac{\partial y}{\partial u}(0,2)$.

Resolução: $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ visto que é a soma, produto e composta de funções polinomais com a exponencial, o seno e o logaritmo e tem domínio $\mathbb{R}^2$. Tem-se, também, que

$$\det Df(1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Então, pelo teorema da função inversa existe uma inversa continuamente diferenciável numa vizinhança do ponto $(1,0)$. Como $f(1,0) = (0,2)$ tem-se ainda,

$$Df^{-1}(0,2) = (Df(1,0))^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, $\dfrac{\partial y}{\partial u}(0,2) = \dfrac{1}{2}$.

2. Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto definido por

$$\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,y + z\cos y = 1 \\ x\cos y - z\,\mathrm{sen}\,y = 0 \end{cases}$$

[1.5] a) Prove que C é uma variedade diferencial. Qual a sua dimensão?

Resolução: Sendo $G(x,y) = \Big(x\,\mathrm{sen}\,y + z\cos y - 1, x\cos y - z\,\mathrm{sen}\,y\Big)$, $G \in C^1(\mathbb{R}^3)$ pois ambas as funções coordenadas são produtos, somas e compostas de funções polinomais, função seno e função cosseno. A característica de

$$DG(x,y) = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}\,y & x\cos y - z\,\mathrm{sen}\,y & \cos y \\ \cos y & -x\,\mathrm{sen}\,y - z\cos y & -\mathrm{sen}\,y \end{bmatrix}$$

é 2 em todos os pontos pois o determinante da matriz formada pela primeira e terceira colunas nunca se anula. Logo C é uma variedade de dimensão $3-2=1$.

[1.5] b) Indique o espaço normal a C no ponto $(0,0,1)$.

Resolução: O espaço normal é composto pelas combinações lineares dos vectores $\nabla G_1(0,0,1) = (0,0,1)$ e $\nabla G_2(0,0,1) = (1,-1,0)$ ou seja o espaço

$$\{(u,-u,w) : u \in \mathbb{R},\ w \in \mathbb{R}\}$$

[1.0] c) Indique uma parametrização para C.

Resolução: O sistema é linear, possível e determinado em x e z e equivalente a

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} y \\ \cos y \end{bmatrix}.$$

Assim uma parametrização para C será $\gamma(y) = \Big(\operatorname{sen} y, y, \cos y\Big), y \in \mathbb{R}$.

[3.0] 3. Estude, quanto à existência de extremos, a função definida por $f(x,y,z) = y + 2z$ no conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$.

Resolução: D é uma variedade compacta pois trata-se de uma circunferência e f é uma função contínua. Logo, pelo teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo em D. Como, $\nabla f(x,y,z) = (0,1,2)$ e, sendo D definido por $H(x,y,z) = (y+z, x^2+y^2+z^2-2) = (0,0)$, $\nabla H_1(x,y,z) = \Big(0,1,1)$ e $\nabla H_2(x,y,z) = \big(2x, 2y, 2z)$, usando o método dos multiplicadores de Lagrange obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0 \\ 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0 \\ 2 + \lambda_2 z = 0 \\ x + y = 0 x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z = \mp 1 \\ \lambda_1 = -\frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \pm\frac{1}{4} \end{cases}$$

Sabendo que f tem máximo e mínimo em D, que os extremantes têm que ser $(0,1,-1)$ e $(0,-1,1)$ e que $f(0,1,-1) = -1$ e $f(0,-1,1) = 1$, é imediato que $\max\limits_D f = 1$ e $\min\limits_D f = -1$.

[3.0] 4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\ ;\ z < 1\ ;\ y > 0\}$$

e o campo vetorial $F(x,y,z) = (x^2 - x, -2xy, z)$. Calcule o fluxo de F através de S segundo a normal com terceira componente negativa, usando o teorema da divergência.

Resolução: Aplica-se o teorema da divergência ao domínio

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\ ;\ y > 0\}$$

e, tendo em conta que $\operatorname{div} F = 0$, obtem-se

$$\iint_S F \cdot n = -\iint_A F \cdot n - \iint_B F \cdot n,$$

em que

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\ ;\ x^2 + y^2 < 1\}$$

e

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\ ;\ x^2 < z < 1\}.$$

Na superfície A tem-se:

$F(x,y,z) = (x^2 - x, -2xy, 1)\ ;\ n(x,y,z) = (0,0,1)$ e, portanto, $F \cdot n = 1$, de onde resulta $\displaystyle\iint_A F \cdot n = \operatorname{vol}_2(A) = \frac{\pi}{2}$.

Na superfície B tem-se:

$F(x, y, z) = (x^2 - x, 0, z)$; $n(x, y, z) = (0, -1, 0)$, ou seja, $\displaystyle\iint_A F \cdot n = 0$.

Assim, concluímos que $\displaystyle\iint_S F \cdot n = -\frac{\pi}{2}$.

5. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \ ; \ z < 1\}$$

e o campo vetorial $F(x, y, z) = (yz - y, x + xz, xy + z)$.

[1.0] a) Indique justificadamente se o campo F é conservativo.

Resolução: Dado que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 1 + z$ e $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = z - 1$, o campo F não é fechado e, portanto, não é conservativo.

[3.0] b) Calcule o fluxo do rotacional de F através de S segundo a normal n com terceira componente negativa, usando o teorema de Stokes.

Resolução: O bordo da superfície S é a linha descrita pelo caminho

$$g(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 1) \ ; \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aplicando o teorema de Stokes obtem-se

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n = \int_{\partial S} F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t) dt = -2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = -2\pi.$$

[3.0] 6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial cuja divergência é constante, $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície limitada cujo espaço normal é o mesmo em todos os pontos e u um vector não nulo desse espaço normal. Considere ainda as superfícies $S_t = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = a + tu; \quad a \in S\}$, em que $t \in [0, 1]$.

Prove que se o campo f pertence ao espaço normal a S_t em todos os seus pontos, para todo $t \in [0, 1]$, então

$$\int \int_{S_1} f.n \, \mathrm{d}S - \int \int_S f.n \, \mathrm{d}S = \int \int_S (\operatorname{div} f) ||u|| \, \mathrm{d}S$$

em que as normais, em S e em S_1, têm o mesmo sentido de u.

Resolução: Como o espaço tangente a S é o mesmo em todos os pontos, S é uma superfície plana. Considere-se então o sólido regular D de bases S e S_1. Por aplicação do teorema da divergência a f em D,

$$\int \int \int_D \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int \int_{S \cup S_1 \cup S_2} f.n_{ext} \, \mathrm{d}S$$

em que S_2 é a superfície lateral do sólido. Dado que o campo é paralelo à superfície lateral do sólido em todos os pontos o fluxo de f é nulo através de S_2 resultando

$$\int \int \int_D \operatorname{div} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int \int_{S \cup S_1} f.n_{ext} \, \mathrm{d}S$$

Basta, agora, orientar as superfícies com normais com mesmo sentido de u, o que faz com que a normal em S seja interior e a normal em S_1 seja exterior, e notar que, sendo $\operatorname{div} f$ constante, o integral do primeiro membro é igual ao produto de $\operatorname{div} f$ pelo volume do sólido e que o volume de um sólido regular é o produto da área da base (dada por $\int \int_S \mathrm{d}S$) pela altura (dada por $||u||$) e obtém-se o resultado pretendido.