Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 9 de Abril de 2016 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^4+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: Se $(x,y)\neq(0,0)$ tem-se

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^2y^2}{x^4+2y^2}-0\right|\leq\frac{x^2y^2}{2y^2}=\frac{x^2}{2}\longrightarrow 0\ .$$

(2 val.) (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e mostre que f é diferenciável na origem.

Resolução: Como $f(x,0)=f(0,y)=0$ para quaisquer $x,y\in\mathbb{R}$ conclui-se que no ponto $(0,0)$ se tem $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$, e portanto a matriz Jacobiana nesse ponto é $Df(0,0)=[0\ \ 0]$. Portanto f é diferenciável na origem porque

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-Df(0,0)\begin{bmatrix}h\\k\end{bmatrix}}{||(h,k)||}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{(h^4+2k^2)||(h,k)||}=0\ ,$$

uma vez que

$$\left|\frac{h^2k^2}{(h^4+2k^2)||(h,k)||}\right|\leq\frac{||(h,k)||^2k^2}{2k^2||(h,k)||}=\frac{||(h,k)||}{2}\longrightarrow 0\ .$$

(1 val.) (c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nos restantes pontos de $\mathbb{R}^2$ e diga, justificando, se f é de classe C^1.

Resolução: Tem-se, se $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^2y}{x^4+2y^2}-\frac{4x^2y^3}{(x^4+2y^2)^2}\ .$$

Se $x\neq 0$ obtém-se $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)=\frac{2}{9}$ e portanto f não é de classe C^1 porque $\frac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua na origem devido a ter-se $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciável no ponto $(1,1)$ com matriz Jacobiana nesse ponto

$$Df(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sendo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = f(e^{xy}, x+y+1)$, calcule $\dfrac{\partial g_2}{\partial x}(0,0)$.

Resolução: Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(e^{xy}, x+y+1)\ \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})\Big|_{(x,y)=(0,0)} \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y}(e^{xy}, x+y+1)\ \frac{\partial}{\partial x}(x+y+1)\Big|_{(x,y)=(0,0)} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) = 4\ . \end{aligned}$$

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $f(x,y) = (\operatorname{sen} x)^2 + y^2$.

Resolução: Temos $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2\operatorname{sen} x \cos x & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(2x) & 2y \end{bmatrix}$. Então

$$Df(x,y) = [0 \quad 0] \iff \begin{cases} \operatorname{sen}(2x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e os pontos críticos são todos da forma $(x,y) = (k\pi/2, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$. A matriz Hessiana é, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} D^2 f(x,y) &= \begin{bmatrix} 2\cos(2x) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ D^2 f(k\pi, 0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(definida positiva)} \\ D^2 f(\pi/2 + k\pi, 0) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(indefinida)}\ , \end{aligned}$$

pelo que, para cada $k \in Z$, o ponto $(k\pi, 0)$ é de mínimo e o ponto $(\pi/2 + k\pi, 0)$ é de sela.

4. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1\ ;\ y^2 < z < 2 + y\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{2+y} 1\, dz \right) dy \right) dx \\
\text{vol}(S) &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left(\int_0^1 1\, dx \right) dy \right) dz + \int_1^4 \left(\int_{z-2}^{\sqrt{z}} \left(\int_0^1 1\, dx \right) dy \right) dz
\end{aligned}$$

(2 val.) b) Sabendo que a função densidade de massa é dada por $f(x,y,z) = 2x$, calcule a massa de S.

Resolução:

$$\text{massa}(S) = \int_0^1 \left(\int_{-1}^2 \left(\int_{y^2}^{2+y} 2x\, dz \right) dy \right) dx = \frac{9}{2}$$

(2 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+z^2} < y < 2 - x^2 - z^2\}.$$

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (y, ρ, θ) tem-se:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = y \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e o volume é dado por

$$\text{vol}(B) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho}^{2-\rho^2} \rho\, dy \right) d\rho \right) d\theta = \frac{5\pi}{6}.$$

(3 val.) 6. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$. Supondo que $u = 0$ na fronteira do disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, mostre que $u \leq 0$ em D.

Resolução: Como u é uma função contínua e D é um conjunto compacto sabemos, pelo Teorema de Weierstrass, que a função u tem máximo e mínimo absolutos em D. Os extremos no interior do disco correspondem a pontos de estacionaridade de u, que são classificados usando a matriz Hessiana:

$$D^2 u(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

O traço da matriz Hessiana é a soma dos valores próprios e neste caso sabemos, por hipótese que é positivo, portanto pelo menos um dos valores próprios é positivo. Logo não podemos ter um ponto de máximo no interior de D. Donde podemos concluir que o máximo pertence então à fronteira de D. Como $u = 0$ na fronteira de D este é o valor máximo de u, ou seja, $u \leq 0$.