CDI-2

1º MAP45 (Versão B) - 22 de março de 2023 - 20h - Duração: 45 min

Nome: ______________________________

Nº: __________ **CURSO :** __________ **SALA :** __________

Justifique todas as respostas

---

1. **(4 val.)** Determine se é prolongável por continuidade à origem a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^6 + y^2}{x^2 + y^4}$.

R: $f(0,y) = \dfrac{1}{y^2}$ não é limitada numa vizinhança de $y = 0$, logo f não é limitada numa vizinhança de $(0,0)$ e portanto não pode ser prolongável por continuidade a $(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (xz, 2+z, xy^2)$ e $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(1,3,1)$ e tal que

$$\nabla g(1,3,1) = (0,1,2).$$

Considere a função $h = g \circ f$.

(a) **(3 val.)** Calcule a matriz Jacobiana de f.

R:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} z & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ y^2 & 2xy & 0 \end{bmatrix}$$

(b) **(3 val.)** Calcule a derivada de h segundo o vector $\mathbf{v}$ no ponto $(1,1,1)$, $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}(1,1,1)$, com $\mathbf{v} = (0,1,1)$.

R: As derivadas parciais de f são contínuas, pelo que é uma função de classe C^1 e portanto diferenciável (em $\mathbb{R}^3$). Como $f(1,1,1) = (1,3,1)$ e g é diferenciável em $(1,3,1)$ temos pelo teorema da derivação da função composta que h é diferenciável em $(1,1,1)$ e portanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \mathbf{v}}(1,1,1) &= Dh(1,1,1)\,\mathbf{v} \\
&= Dg(1,3,1)\,Df(1,1,1)\,\mathbf{v} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 5
\end{aligned}$$

3. **(4 val.)** Determine a recta normal e o plano tangente à superfície.

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^4 - y^2\right\}$$

no ponto $(1,0,1)$.

R: A superfície S é o conjunto de nível 0 da função $F(x,y,z) = x^4 - y^2 - z$ de classe C^1. Então a direcção normal a S no ponto $(1,0,1)$ é a direcção de $\nabla F(1,0,1)$. Como $\nabla F(x,y,z) = (4x^3, -2y, -1)$, temos $\nabla F(1,0,1) = (4,0,-1)$. Donde obtemos a recta normal a S no ponto $(1,0,1)$ que é

$$\{(1+4t, 0, 1-t) : \; t \in \mathbb{R}\}$$

e o plano tangente que é

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - z = 3\right\}$$

4. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} 1+\dfrac{2x^3}{x^2+y^4} & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 1 & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) **(3 val.)** Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

R:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+2t-1}{t}=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-1}{t}=0$$

(b) **(3 val.)** Mostre que f é diferenciável na origem.

R: A função f é diferenciável na origem se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ com

$$\varepsilon(x,y)=f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y.$$

Como $\varepsilon(x,y)=1+\dfrac{2x^3}{x^2+y^4}-1-2x=-\dfrac{2xy^4}{x^2+y^4}$,

$$\left|\frac{2xy^4}{x^2+y^4}\right|=\frac{2\,|x|\,y^2y^2}{x^2+y^4}\leqslant y^2$$

e $\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant|y|$ obtemos $\left|\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant|y|$. Uma vez que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|y|=0$, concluímos que f é diferenciável na origem.