Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1 - V1 - 26 de Junho de 2023 - 8h

Duração: 1h

Resolução Abreviada

[5.0 val.] 1. Determine uma expressão para o volume do conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1;\ y > 0;\ x + y < y + z < 2\}$$

na forma de integrais do tipo $\int(\int(\int\ dz)dx)dy$. Não precisa de calcular o volume.

Solução: As desigualdades $0 < x < 1$, $0 < y$ e $x + y < 2$ implicam que $0 < y < 2$. Dado um y fixo neste intervalo, obtêm-se as condições para a intersecção de S com o plano determinado por aquele valor de y:

$$0 < x < 1;\ x < z < 2 - y.$$

Portanto o limite superior para x é o mínimo entre 1 e $2 - y$, e temos

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_x^{2-y} 1\, dz \right) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} \left(\int_x^{2-y} 1\, dz \right) dx \right) dy.$$

[5.0 val.] 2. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o volume do conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - x^2 - y^2;\ x > 0;\ y > 0\}.$$

Solução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) tem-se:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ \rho < z < 2 - \rho^2.$$

Portanto, o volume do conjunto A é dado por

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_\rho^{2-\rho^2} \rho\, dz \right) d\rho \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(2\rho - \rho^3 - \rho^2 \right) d\rho \right) d\theta = \frac{5\pi}{24}.$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo vectorial definido por

$$f(x, y) = \left(\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

[3.0 val.] a) Determine o integral de $\|f\|$ ao longo da semi-circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2}$ contida no semi-plano superior.

Solução: O campo escalar $\|f\|$ é contínuo sobre a circunferência e o seu valor sobre esta é

$$\|f(x, y)\| = \left\| \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

logo o integral de $\|f\|$ ao longo da semi-circunferência é o produto de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pelo seu comprimento, isto é, π.

[4.0 val.] b) Determine o trabalho de f ao longo da porção da elipse de equação $2x^2 + 6y^2 = 8$ contida no semi-plano superior no sentido crescente de x.

Solução: f é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ e $\frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y)$ para qualquer (x,y) nesse conjunto. Logo f é fechado no conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$, no qual a linha dada é homotópica à semi-circunferência descrita pelo caminho $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, que é um caminho regular. Então, o trabalho é dado por

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_0^\pi \frac{1}{4}(-\cos t, \mathrm{sen}\, t) \cdot (2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t)dt = 0.$$

[3.0 val.] 4. Prove que se f é um campo escalar de classe $C^2(A)$, com $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto, e o trabalho de $\left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ é nulo ao longo da fronteira de qualquer triângulo contido em A, então f é harmónica em A, ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

em todos os pontos de A. (Sugestão: Suponha que existe um ponto (a,b) em que a igualdade não se verifica).

Solução: Se existirem $M \in \mathbb{R}^+$ e $(a,b) \in A$ tais que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = M \neq 0$ então existe uma bola $B_r(a,b)$, $r \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \geq \frac{M}{2} > 0, \text{ se } (x,y) \in B_r(a,b),$$

por continuidade. Seja T um triângulo qualquer contido nessa bola. Então, pelo teorema de Green,

$$\int_{\partial T} \left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot d\gamma = -\iint_T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy \leq \frac{MA_T}{2} < 0,$$

onde ∂T é percorrida mantendo T à esquerda e A_T é a área de T, o que contraria a hipótese. Se $M \in \mathbb{R}^-$, o raciocínio é idêntico.