Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1 - V1 - 26 de Junho de 2023 - 18h

Duração: 1h

Resolução Abreviada

[5.0 val.] 1. Determine uma expressão para o volume do conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1;\ -1 < y < 1 - x;\ x - 1 < z < 2 - y\}$$

na forma de integrais do tipo $\int(\int(\int\ dz)dx)dy$. Não precisa de calcular o volume.

Solução: As desigualdades $0 < x$, $-1 < y < 1 - x$ implicam que $-1 < y < 1$. Dado um y fixo neste intervalo, obtêm-se as condições paa a intersecção de S com o plano determinado por aquele valor de y:

$$0 < x < 1;\ x - 1 < z < 2 - y.$$

Portanto o limite superior para x é o mínimo entre 1 e $1 - y$, e temos

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{2-y} 1\,dz\right)dx\right)dy + \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1-y}\left(\int_{x-1}^{2-y} 1\,dz\right)dx\right)dy.$$

[5.0 val.] 2. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o volume do conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} + z > 1;\ z < 1 - x^2 - y^2;\ y > 0\}.$$

Solução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) tem-se:

$$0 < \theta < \pi,\ 1 - \rho < z < 1 - \rho^2.$$

Portanto, o volume do conjunto A é dado por

$$\int_{0}^{\pi}\left(\int_{0}^{1}\left(\int_{1-\rho}^{1-\rho^2} \rho\,dz\right)d\rho\right)d\theta = \int_{0}^{\pi}\left(\int_{0}^{1}\left(\rho - \rho^3 - \rho + \rho^2\right)d\rho\right)d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo definido por

$$f(x, y) = \left(x^2 + \frac{y}{x^2 + y^2}\,,\ 3y + 1 - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

e γ um caminho cuja imagem é o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1;\ y \geq 0\}$ percorrido no sentido horário.

[3.0 val.] a) Determine a massa de um fio com a forma de C sabendo que a sua densidade de massa por unidade de comprimento é dada, em cada ponto $(x, y) \in C$, por $\lambda(x, y) = \sqrt{1 + 2y^2}$.

Solução: Um caminho γ cuja imagem é C é $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (-\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t)$. Como

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen}^2 t}{2}} \quad \text{e} \quad (\lambda \circ \gamma)(t) = \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t},$$

a massa do fio é dada por

$$m = \int_0^\pi \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}.\sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen}^2 t}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{3 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}.$$

[4.0 val.] b) Verifique se f é um campo fechado e calcule o seu trabalho ao longo de γ.

Solução: Como $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$,

$$\frac{\partial f_x}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial f_y}{\partial x}(x, y),$$

f é um campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mais ainda, o campo $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f_1(x, y) = (x^2, 3y + 1)$ também é fechado em $\mathbb{R}^2$, o qual é um conjunto simplesmente conexo, sendo, portanto um campo conservativo.

Mais ainda, um potencial ϕ para f_1 pode ser obtido através das equações $\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^2$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3y + 1$ sendo uma solução $\phi(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + y$. Assim, o trabalho de f_1 ao longo de γ é $\phi(\gamma(\pi)) - \phi(\gamma(0)) = \frac{2}{3}$.

Por outro lado, $f_2 = f - f_1$ também é conservativo no conjunto definido por $y \geq 0$, pois este também é simplesmente conexo, e nesse conjunto γ é homotópico a $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$, logo

$$\int_\gamma f_2 \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} f_2 \cdot d\gamma_1 = \int_0^\pi (\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (\operatorname{sen} t, \cos t) dt = \int_0^\pi dt = \pi.$$

Então, o trabalho de f ao longo de γ é

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma = \int_\gamma f_1 \cdot d\gamma + \int_\gamma f_2 \cdot d\gamma = \frac{2}{3} + \pi.$$

[3.0 val.] 4. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo limitado e fechado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $\overline{x} \in I$ tal que

$$\int_I f = f(\overline{x}) \operatorname{vol}_n(I),$$

em que $\operatorname{vol}_n(I)$ é o volume do intervalo I.

Solução: Dado que I é limitado e fechado e f contínua, tem-se $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in I$, em que

$$m = \min\{f(x) : x \in I\}, \; M = \text{máx}\{f(x) : x \in I\}.$$

Assim, tem-se

$$m \operatorname{vol}_n(I) \leq \int_I f \leq M \operatorname{vol}_n(I),$$

ou seja,

$$m \leq \frac{\int_I f}{\operatorname{vol}_n(I)} \leq M.$$

Dado que f é contínua existe $\overline{x} \in I$ tal que

$$f(\overline{x}) = \frac{\int_I f}{\mathrm{vol}_n(I)}.$$

Portanto,

$$\int_I f = f(\overline{x}) \, \mathrm{vol}_n(I).$$