Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame 1 - V1 - 26 de Junho de 2023 - 13h

Duração: 1h

Nome: ____

Número: __________ **Curso:**__________ **Sala:**__________

Apresente e justifique todas as respostas

[5.0 val.] 1. Calcule o integral da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = z^2$ no conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0;\ y > 0;\ x - 1 < z < 1 - y\}$$

usando integrais do tipo $\int(\int(\int f(x,y,z)\, dy)dx)dz$.

Solução: As condições implicam $-1 < z < 1$. A intersecção de A com o plano definido por um valor de z fixo é determinada por

$$0 < x < 1 + z;\ 0 < y < 1 - z,$$

e o integral é

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{0}^{1+z} \left(\int_{0}^{1-z} z^2 dy \right) dx \right) dz = \int_{-1}^{1} z^2(1 - z^2)\, dz = \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15}.$$

[5.0 val.] 2. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o volume do conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 < z < 1 + x^2 + y^2;\ y > x > 0\}.$$

Solução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) tem-se:

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2},\ 2\rho^2 < z < 1 + \rho^2.$$

Portanto, o volume do conjunto A é dado por

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{0}^{1} \left(\int_{2\rho^2}^{1+\rho^2} \rho\, dz \right) d\rho \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{0}^{1} \left(\rho + \rho^3 - 2\rho^3 \right) d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{16}.$$

3. Seja f o campo definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \left(y + e^{(x+y)^2}, e^{(x+y)^2} - x \right).$$

[3.0 val.] a) Determine o integral de f ao longo do segmento de recta que vai de $(2,0)$ para $(0,2)$.

Solução: f é um campo vectorial de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (2-t, t)$ é um caminho regular que percorre o segmento de recta dado no sentido indicado. Então, o trabalho de f ao longo desse segmento é

$$\int_0^2 \left(t + e^4, e^4 - 2 + t\right) \cdot (-1,1)dt = (-2)\int_0^2 dt = -4$$

[4.0 val.] b) Verifique se f é um campo fechado e determine o integral de f ao longo do caminho $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\gamma_1(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right), 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right).$$

Solução: Como $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = 1 + 2(x+y)e^{(x+y)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f_y}{\partial x}(x,y) = 2(x+y)e^{(x+y)^2} - 1,$$

f não é um campo fechado. Pelo teorema de Green, sendo D o conjunto definido por $x^2 + y^2 < 4$ e $x + y > 2$, o qual é um domínio elementar,

$$\int_{\partial D} f \cdot d\gamma = \iint_D \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} dxdy = -2A_D,$$

onde ∂D é percorrida mantendo D à esquerda e $A_D = \pi - 2$ é a área de D.

Então,

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma - \int_{\gamma_1} f \cdot d\gamma_1 = \int_{\partial D} f \cdot d\gamma = 4 - 2\pi,$$

onde γ_1 é o caminho da alínea anterior, e o integral pedido é

$$\int_\gamma f \cdot d\gamma = -2\pi.$$

[3.0 val.] 4. Usando adequadamente o teorema de Fubini, mostre que se tem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. (Sugestão: Suponha que existe um ponto (a,b) em que a igualdade não se verifica).

Solução: Sem perda de generalidade no ponto (a,b) tem-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} > 0.$$

Sendo f uma função de classe C^2, existe um intervalo $I =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$ que contém o ponto (a,b) onde se tem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) > 0,\ \forall (x,y) \in I.$$

Assim,

$$\iint_I \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right) dxdy > 0.$$

Usando o teorema de Fubini, tem-se

$$\begin{aligned}
0 &< \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)dy \right) dx - \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dx \right) dy \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,b_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,b_1) \right) dx - \int_{b_1}^{b_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_2,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,y) \right) dy \\
&= f(a_2,b_2) - f(a_1,b_2) - f(a_2,b_1) + f(a_1,b_1) - f(a_2,b_2) + f(a_2,b_1) + f(a_1,b_2) - f(a_1,b_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$