MAP2 de Cálculo Diferencial e Integral II - 20h00, V1

Duração: 45min (Resolução abreviada)

1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por (5 val.)

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2x^3y.$$

Res. 1.º Passo: pontos críticos?

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 6x - 6x^2y = 0 \iff x(1-xy) = 0 \quad (1) \\ 2y - 2x^3 = 0 \iff y = x^3 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \,\&\, (2) \iff \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad 1 = x^4 \iff x = \pm 1 \\ y = x^3 \end{cases}$$

Pontos críticos: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$

2.º passo: classificação destes pontos?

Usamos o teorema de classificação visto na aula.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6 - 12xy & -6x^2 \\ -6x^2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{(0,0)}$

$$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 6 > 0 \\ \lambda_2 = 2 > 0 \end{matrix} \overset{\text{T.C. ptos críticos}}{\Longrightarrow} (0,0) \text{ é um pto de mínimo local de } f \text{ em } \mathbb{R}^2$$

$\boxed{(1,1)}$

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det H_f(1,1) = 24 > 0 \\ \text{traço } H_f(1,1) = -4 < 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{TC pto crítico.}} \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0 \Rightarrow$$

$(1,1)$ é um ponto de sela de f em $\mathbb{R}^2$

$\boxed{(-1,-1)}$

Como $H_f(-1,-1) = H_f(1,1)$

$\Rightarrow (-1,-1)$ é um ponto de sela de f em $\mathbb{R}^2$.

2. Considere $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z, t) = (e^{x+y+z}, y \cos t, z \cos t).$$

(a) Mostre que as soluções de $f(x, y, z, t) = (1, 0, 0)$ podem ser descritas numa vizinhança da origem na forma $(x, y, z) = \gamma(t)$. (4 val.)

1.ª Res.

Notemos que $f(x,y,z,t) = (1,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x+y+z} - 1 = 0 \\ y\cos t = 0 \\ z \cos t = 0 \end{cases}$

Podemos aplicar o teorema da função implícita à função:

$$F(x,y,z,t) = \left(e^{x+y+z} - 1, \ y\cos t, \ z\cos t\right), \quad F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

Verificamos hipóteses:

→ $F \in C^1$ (de facto $F \in C^\infty$)

→ $F(0,0,0,0) = (0,0,0)$

→ $\det\left[\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(0,0,0,0)\right] \neq 0$?

Cáux:

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(x,y,z,t)=\begin{bmatrix} e^{x+y+z} & e^{x+y+z} & e^{x+y+z} \\ 0 & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & \cos t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\left[\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(0,0,0,0)\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad (*)$$

$\overset{TFI}{\Longrightarrow}$ numa vizinhança $\mathcal{U}$ de $(x,y,z,t)=(0,0,0,0)$

$$\{(x,y,z,t)\in\mathcal{U} : F(x,y,z,t)=(0,0,0)\}$$

$$=\{(\gamma(t),t),\ \gamma(t)=(x(t),y(t),z(t)),\ t\in I\}$$

para uma certa função $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma\in C^\infty$, definida numa vizinhança $I\subset\mathbb{R}$ de $t=0$.

Obs: Numa vizinhança de $t=0$:

$$\left.\begin{cases} e^{x+y+z}=1 \\ \left.\begin{aligned} y\cos t &=0 \\ z\cos t &=0 \end{aligned}\right\} \underset{\cos t\neq 0}{\Leftrightarrow} y=z=0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

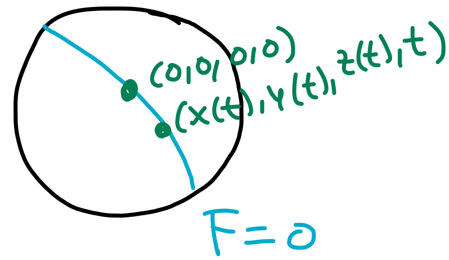
Assim, considerando $\gamma(t)=(0,0,0)$ teríamos a).

(2ª Resolução) (*)

(b) Determine $\gamma'(0)$. (4 val.)

1ª Res. De a), sabemos que localmente:

$$F(x(t), y(t), z(t), t) = (0,0,0)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{x(t)+y(t)+z(t)} = 1 \\ y(t)\cos t = 0 \\ z(t)\cos t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{d.o.t}}{\Longrightarrow}_{(S)} \begin{cases} (x'(t)+y'(t)+z'(t))\, e^{x(t)+y(t)+z(t)} = 0 \\ y'(t)\cos t - y(t)\operatorname{sen} t = 0 \\ z'(t)\cos t - z(t)\operatorname{sen} t = 0 \end{cases}$$

Se $t=0 \Rightarrow x(t) = 0 = y(t) = z(t)$

$$\Rightarrow \quad (S) \Leftrightarrow \{ x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0 \Leftrightarrow \gamma'(t) = (0,0,0)$$

Obs:

De $(*) \Rightarrow \gamma'(t) = (0,0,0)$.

Obs: Podiamos ainda ter trabalhado com a função f do enunciado. Para a) verificaríamos que $f \in C^1$ (C^∞ de facto); $f(0,0,0,0) = (1,0,0)$; $\underbrace{\det\left[\frac{\partial f}{\partial(x,y,z)}(0,0,0,0)\right]}_{\text{Notem que é igual a } \circledast} \neq 0$

3. Seja $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z$. Determine os valores máximo e mínimo de f no conjunto (4 val.)

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Res. Comecemos por notar que A é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^3$. De facto: $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$, $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ($F \in C^\infty$; em particular contínua) $\Rightarrow$ A é um conjunto fechado. Além disso é limitado, dado que $\|(x,y,z)\| = 1$, $\forall (x,y,z) \in A$.

Como f é contínua $\underset{\text{TWeierstrass}}{\Longrightarrow}$ $f|_A$ alcança máximo e mínimo absoluto.

Para determinar estes pontos usamos o teorema dos multiplicadores de Lagrange. (cond. necessária)

Pelo TML se (x,y,z) é um ponto de extremo, então $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ 2x = 2\lambda x \Leftrightarrow 2x(1-\lambda) = 0 & (2) \\ 4y = 2\lambda y \Leftrightarrow 2y(2-\lambda) = 0 & (3) \\ 2 = 2\lambda z \Leftrightarrow 2(1-\lambda z) = 0 & (4) \end{cases}$$

Notemos que:

(2) $\iff x=0$ ou $\lambda=1$

(3) $\iff y=0$ ou $\lambda=2$

(4) $\iff \lambda z=1$

$\boxed{\text{Se } x=0=y}$ $\underset{(1)}{\Longrightarrow} z^2=1 \Longrightarrow z=\pm 1$

Sol: $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$

$\boxed{\text{Se } x=0,\ \lambda=2}$

(4) $\Longrightarrow z=1/2 \underset{(1)}{\Longrightarrow} y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Sol: $\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},\tfrac{1}{2}\right)$, $\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1/2\right)$

$\boxed{\lambda=1,\ y=0}$

(4) $\Longrightarrow z=1 \underset{(1)}{\Longrightarrow} x=0$

Sol: $(0,0,1)$ (novamente)

Como $f(0,0,1) = 2$

$$f(0,0,-1) = -2$$

$$f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5/2$$

$$f\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right) = 1$$

Concluimos que:

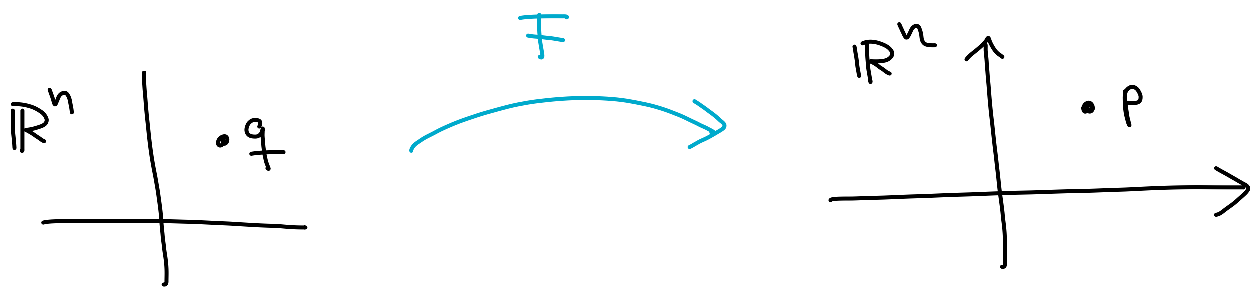
$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é o ponto de máximo de $f|_A$ (v. max: $5/2$)

$(0,0,-1)$ é o ponto de mínimo de $f|_A$ (v. min: -2)

4. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\det DF(x) \neq 0$. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Mostre que $F(U) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. (Sugestão: aplique o teorema da função inversa na vizinhança de cada ponto $x \in U$.) (3 val.)

Res. Devemos ver que $F(\mathcal{U})$ é um aberto, ie, que todos os seus pontos são interiores, ie, que para cada $p \in F(\mathcal{U})$ existe $B(p) \subset F(\mathcal{U})$.

Dado $p \in F(\mathcal{U})$, suponhamos por contradição que $p \in \partial F(\mathcal{U})$. Como $p \in F(\mathcal{U}) \Rightarrow \exists\, q \in \mathcal{U} / F(q) = p$



Mas por hipótesis $F \in C^1$ e $\det DF(q) \neq 0$

$\Longrightarrow$ (pelo teorema da função inversa) $\exists\ \mathcal{U}_q$ vizinhança de q, $\mathcal{U}_q \subset \mathcal{U}$;

$\mathcal{V}_p$ vizinhança de p, $\mathcal{V}_p \subset F(\mathcal{U})$,

tais que $F : \mathcal{U}_q \longrightarrow \mathcal{V}_p$ é invertível

(ie existe $F^{-1} : \mathcal{V}_p \longrightarrow \mathcal{U}_q$).

Por definição de vizinhança V_p contém uma bola aberta $\Rightarrow \exists\, B(p) \subset V_p \subset \mathcal{F}(\mathcal{U})$

logo $p \notin \partial \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

Deste modo vemos que $p \in \underline{\mathring{\mathcal{F}}(\mathcal{U})}$. Dado que p é arbitrário, $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \mathring{\mathcal{F}}(\mathcal{U})$, i.e., $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ é um conjunto aberto.

Recordar:

$\mathring{A}$: interior de A