Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame de Recurso - V1 - 10 de Juiho de 2023 - 10h30

Duração: 2h

Nome: ______________________________

Número: __________ **Curso:**__________ **Sala:**__________

Apresente e justifique todas as respostas

---

1. Considere as funções, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2+3xy}{3x^2+2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g\,(x,y) = yf(x,y).$$

[1.5 val.] a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite de f em $(0,0)$.

[1.5 val.] b) Calcule a derivada de g segundo o vector $(1,1)$ no ponto $(0,0)$, $D_{(1,1)}g\,(0,0)$, e verifique se g é diferenciável em $(0,0)$.

[2.0 val.] 2. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\nabla f(2,0,1) = (3,2,2)$ e seja

$$g(x,y) = f(x^2 + xy, e^x - e^y, xy).$$

Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$.

[3.0 val.] 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2y + 2xy^2 - 2x^2 - \frac{5}{2}y^2$. Mostre que f tem pontos críticos nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ e classifique-os.

[2.0 val.] 4. Seja $f(x,y,z) = x$. Determine os valores máximo e mínimo de f no conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2,\ y^2 + z^2 = 2\right\}.$$

[2.0 val.] 5. Determine uma expressão para o volume do conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0;\ 0 < y < z < 2 - x^2 - y^2\},$$

na forma de integrais do tipo $\int(\int(\int\ dx)dy)dz$. Não precisa de calcular o volume.

[2.0 val.] 6. Usando uma mudança de variáveis adequada, calcule o volume do conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < 1+z;\ z < \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2};\ x>0;\ y>0\}.$$

7. Sejam f e g os campos vetoriais definidos por

$$f(x,y) = \left(3y + \frac{1}{1+(x+y)^4}, 2x + \frac{1}{1+(x+y)^4}\right)$$

e

$$g(x,y) = \left(\frac{-3(y+1)}{x^2+(y+1)^2}, \frac{3x}{x^2+(y+1)^2}\right).$$

[1.5 val.] a) Calcule o integral de g ao longo da circunferência de centro em $(0,-1)$ e raio 1 quando esta é percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[1.5 val.] b) Determine o integral de $f + g$ ao longo da circunferência de centro em $(0, 0)$, raio 4 e percorrida uma vez no sentido anti-horário.

[3.0 val.] 8. Usando adequadamente o teorema de Green, mostre que se tem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2.