CDI 2

1^o MAP45 (Versão A) - 22 de Março de 2023 - 19h, Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

1. Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{3x^4 + 2y^4}} \quad \text{e} \quad g\,(x,y) = \frac{x^3 y}{\sqrt{3x^4 + 2y^4}}.$$

a) (3 val.) Calcule, ou mostre que não existe, o limite de f no ponto $(0,0)$.
Solução: No ponto $(0,0)$, os limites direccionais de f dependem de m já que

$$\lim_{x \to 0} f\,(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{3x^4 + 2m^4 x^4}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 \sqrt{3 + 2m^4}} = \frac{1}{\sqrt{3 + 2m^4}}.$$

Logo a função f não tem limite no ponto $(0,0)$.

b) (3 val.) Calcule, ou mostre que não existe, o limite de g no ponto $(0,0)$.
Solução: Como

$$\left| \frac{x^3 y}{\sqrt{3x^4 + 2y^4}} \right| = \frac{|x^3 y|}{\sqrt{3x^4 + 2y^4}} \leq \frac{|x^3 y|}{\sqrt{3x^4}} = \frac{|x^3 y|}{x^2 \sqrt{3}} = \frac{|xy|}{\sqrt{3}},$$

para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, obtem-se

$$0 \leq \lim_{(x,y) \to (0,0)} |g\,(x,y) - 0| \leq \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{3}} = 0,$$

donde se conclui que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} g\,(x,y) = 0$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = e^{xy} + \cos\,(xy) - 2.$$

a) (3 val.) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y)$. Será f uma função de classe C^1?
Solução: As derivadas parciais de f são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) = y e^{xy} - y \sin\,(xy) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) = x e^{xy} - x \sin\,(xy)\,,$$

donde se deduz pelas propriedades básicas das funções contínuas (soma, produto e composição de funções contínuas) que as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Logo a função f é de classe C^1.

b) (3 val.) Recorra à alínea anterior para calcular o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} + \cos(xy) - 2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Solução: Como f é de classe C^1, sabemos que f é diferenciável em $(0,0)$. Como $f(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (pela alínea anterior), isto significa que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|e^{xy} + \cos(xy) - 2|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

donde se conclui que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy} + \cos(xy) - 2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

c) (4 val.) Admita que uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, diferenciável no seu domínio, satisfaz

$$g(0,0) = (1,\pi) \text{ e } Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \pi & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(0,0)$, $D(f \circ g)(0,0)$.
Solução: Sendo f de classe C^1, sabemos que é diferenciável no ponto $g(0,0) = (1,\pi)$. Assim, porque g é diferenciável em $(0,0)$, a função $f \circ g$ é diferenciável em $(0,0)$ com matriz jacobiana dada por

$$\begin{aligned} D(f\circ g)(0,0) &= Df\,(g(0,0))\,Dg(0,0) = Df(1,\pi)Dg(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) \end{bmatrix} Dg(0,0) \\ &= \begin{bmatrix} \pi e^{\pi} & e^{\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \pi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi e^{\pi} & 2\pi e^{\pi} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. (4 val.) Determine a recta tangente e a recta normal à curva definida por

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2\,(x+y)^2 + 3\,(x-y)^2 = 5\right\}$$

no ponto $(1,0)$.
Solução: Se considerarmos a função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f\,(x,y) = 2\,(x+y)^2 + 3\,(x-y)^2,$$

temos

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2\,(x+y)^2 + 3\,(x-y)^2 = 5\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f\,(x,y) = 5\right\},$$

e

$$\nabla f\,(x,y) = (4\,(x+y) + 6\,(x-y)\,, 4\,(x+y) - 6\,(x-y)) = (10x - 2y, 10y - 2x)\,,$$

Como $(1,0) \in C$, sabemos que o vector $\nabla f\,(1,0) = (10,-2)$ é ortogonal a C no ponto $(1,0)$. Logo a recta tangente e a recta normal à curva C no ponto $(1,0)$ são, respectivamente,

$$\{(1,0) + t\,(2,10) : t \in \mathbb{R}\} \text{ e } \{(1,0) + t\,(10,-2) : t \in \mathbb{R}\}.$$