**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - 27 de Junho de 2015, 15:00h
Duração: Exame (3h), Teste (1h30)

**Apresente e justifique todos os cálculos**

## Teste 1

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^4}{2x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

[1.5] a) Determine o conjunto dos pontos em que a função $f$ é contínua.

[1.0] b) Calcule a derivada de $f$ no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(1,2)$.

[1.0] c) Diga, justificando, se $f$ é diferenciável no seu domínio.

2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(u,v) = u + u^2 v - v^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função da forma

$$g(x,y,z) = (1 + x + 2y + xy\phi(x,y,z), 2 - x + y + 3z + yz\phi(x,y,z)),$$

[3.0] onde $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^1$. Determine a matriz jacobiana $D(h \circ g)(0,0,0)$.

[3.0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = 3x^4 + 3x^2 y - y^3.$$

4. Considere o conjunto definido por

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 < z \; ; \; x + z < 1 \; ; \; x > 0\}.$$

[3.0] a) Escreva expressões para o volume de $D$ em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

[1.5] b) Calcule o volume de $D$.

[3.0] 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 + z \; ; \; x^2 + y^2 + z^2 < 3 \; ; \; y > 0\}.$$

[3.0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ e diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$. Mostre que se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to a} Df(x) = T$ então $f$ é diferenciável em $a$ e $Df(a) = T$.

## Teste 2

1. Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-y^2},\ x^2+y^2 < 4\}$.

[2.0] a) Verifique que $M$ é uma variedade em $\mathbb{R}^3$ e indique qual a sua dimensão.

[1.0] b) Determine um vector tangente a $M$ no ponto $(0,0,1)$.

[2.0] c) Calcule o integral em $M$ da função $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4(x^2+y^2)z^2+1}}$ .

[3.0] 2. Use o Teorema dos multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos da superfície $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+(y-1)^2+z^2 = 4\}$ mais próximos e mais distantes do ponto $(0,0,0)$.

[3.0] 3. Mostre que as equações $e^{2x}+e^{2y}-e^t = z$ e $x-y+z-t = 1$ definem $z$ e $t$ como funções implícitas de $x$ e $y$ de classe $C^1$ numa vizinhança de $(x,y,z,t) = (0,0,1,0)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$.

[2.0] 4. Use o Teorema de Green para calcular o trabalho realizado pelo campo vectorial dado por $F(x,y) = (xe^{-2x}, x^3+3xy^2)$ ao longo da fronteira da região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\ ;\ x > |y|\},$$

percorrida no sentido horário.

5. Seja $G(x,y,z) = (z, x^2, y^3)$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 < 1\ ,\ y = 1\}.$$

[2.0] a) Calcule, pelo Teorema de Stokes, o trabalho de $G$ ao longo do bordo de $S$ orientado no sentido anti-horário, quando visto de $(0,10,0)$.

[2.0] b) Calcule, usando o Teorema da divergência, o fluxo do rotacional de $G$ através da superfície

$$E = \{(x,y,z) : x^2+z^2 = 1\ ,\ -1 < y < 1\},$$

orientada com a normal $n(x,y,z)$ que satisfaz $n(0,0,1) = (0,0,1)$.

[3.0] 6. Seja $R$ um domínio regular de $\mathbb{R}^3$ e $\partial R$ a sua fronteira. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dois campos escalares de classe $C^\infty$. Sabendo que $f$ se anula em $\partial R$, prove que

$$\int_R (f \triangle g + \nabla f \cdot \nabla g) = 0$$

onde $\triangle g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$. Sugestão: Considere o campo vectorial $f\nabla g$.