Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: LEIC-A, LEMat, LEQ21, LEAmb, LEGM, LEC21
Exame 1^a Época - 4 de Julho de 2022 - 8h
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{3x^2+2y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: Sendo

$$|f(x,y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{3x^2+2y^2}} \right| \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |y|$$

tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

e, portanto, a função f é contínua na origem.

(2 val.) (b) Decida sobre a diferenciabilidade de f na origem.

Resolução: Note-se que $\dfrac{f(x,x)}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{5}|x|}$ e, portanto, a derivada de f segundo o vetor $(1,1)$ na origem não existe, ou seja, a função f não é diferenciável na origem.

(2 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0,0,0) = 0$. Sendo

$$h(x,y,z) = f\left(f(xy, x^2+z^2, z), x \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} y\right),$$

determine $\dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0,0)$ em função das derivadas parciais de f no ponto $(0,0,0)$.

Resolução: Sendo $h = f \circ g$ onde $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por

$$g(x,y,z) = (f(xy, x^2+z^2, z), x \operatorname{sen} y, \operatorname{sen} y),$$

usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0).\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0).\frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0,0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0).\frac{\partial g_3}{\partial y}(0,0,0).$$

Uma vez que

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0).x_{|(0,0,0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0).0 + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0).0 = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0,0) = x\cos y_{|(0,0,0)} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g_3}{\partial y}(0,0,0) = \cos y_{|(0,0,0)} = 1,$$

temos

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0).$$

(2 val.) 3. Escreva uma expressão para o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1,\, 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\right\}$$

usando um integral iterado da forma $\int(\int(\int dy)\,dz)\,dx$.

Resolução:

$$vol(V) = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^1 1\,dy\,dz\,dx + \int_0^1 \int_{1-x^2}^{2-x^2} \int_0^{\sqrt{2-z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx.$$

(3 val.) 4. Calcule o volume do sólido

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2},\, y \ge 0\right\}.$$

Resolução: Usando uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas

$$g(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

obtemos

$$vol(D) = \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_{\rho^2}^{2-\rho} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{5}{12}\pi.$$

5. Considere os campos vetoriais $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definidos por

$$F(x,y) = (2y - \cos(x^2), 3x + 2\,\mathrm{sen}(y^2)) \quad \text{e} \quad G(x,y) = \left(-\frac{y}{(x-2)^2+y^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}\right).$$

(2 val.) (a) Será F um campo gradiente? Justifique a sua resposta.

Resolução: Uma vez que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2 \ne 3 = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

o campo F não é fechado, e portanto não pode ser gradiente.

(2 val.) (b) Calcule $\oint_C (F+G)\cdot dg$, onde C é a fronteira do intervalo $[-1,1]\times[-1,1]$ percorrida uma vez no sentido anti-horário.

Resolução: O campo G é fechado e a curva C é homotópica à curva constante no seu domínio, pelo que $\oint_C G\cdot dg = 0$. Desta forma, usando o Teorema de Green,

$$\oint_C (F+G)\cdot dg = \oint_C F\cdot dg = \iint_{[-1,1]\times[-1,1]} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = 2 \times 2 = 4.$$

(2 val.) 6. Considere o conjunto dos triângulos planos isósceles de perímetro P. Mostre que um deles tem a maior área possível e determine os comprimentos das respectivas arestas.

Resolução: Considerem-se os triângulos com vértices nos pontos $(-x,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$, em que $x > 0, y > 0$.

Cada um destes triângulos tem uma aresta de comprimento $2x$ e as outras duas com o mesmo comprimento $\sqrt{x^2+y^2}$.

Assim, o perímetro P de cada um destes triângulos é dado pela expressão $2x + 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Note-se que $P = 2x + 2\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 4Px + 4y^2 - P^2 = 0$.

A área de cada um destes triângulos é definida pela expressão xy.

Definindo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = xy$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = 4Px + 4y^2 - P^2$, pretende-se determinar os extremos de f sujeitos à condição $F = 0$.

Recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} y = 4\lambda P \\ x = 8\lambda y \\ 4Px + 4y^2 - P^2 = 0, \end{cases}$$

de onde se obtém

$$x = \frac{P}{6},\ y = \frac{\sqrt{3}P}{6}.$$

Assim, $2x = \sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{P}{3}$, ou seja, o triângulo isósceles de área máxima é equilátero com arestas de comprimento $\dfrac{P}{3}$.

Note-se que $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ e $f(x, y) > 0$ no conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ 4Px + 4y^2 - P^2 = 0\right\}.$$

(3 val.) 7. Seja $p_\lambda(x) = a_n(\lambda)x^n + \ldots + a_1(\lambda)x + a_0(\lambda)$ a expressão de um polinómio de grau n na variável real x cujos coeficientes são funções de classe C^1 do parâmetro real λ. Suponha que o polinómio p_0 possui n raízes reais distintas. Prove que o polinómio p_λ possui também n raízes reais distintas para $|\lambda|$ suficientemente pequeno. *(Sugestão: Recorde que a derivada de um polinómio não se anula numa raiz simples.)*

Resolução: Consideremos a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, dada por $F(x, \lambda) = p_\lambda(x)$, e seja x_0 uma raiz do polinómio p_0. Uma vez que p_0 tem n raízes distintas, todas as suas raízes são simples, e portanto $p_0'(x_0) \neq 0$. Desta forma, temos $F(x_0, 0) = p_0(x_0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, 0) = p_0'(x_0) \neq 0$, pelo que o Teorema da Função implícita garante que numa vizinhança do ponto $(x_0, 0)$ as soluções da equação $F(x, \lambda) = 0 \Leftrightarrow p_\lambda(x) = 0$ podem ser escritas na forma $x = f(\lambda)$, com f de classe C^1. Este argumento pode ser usado para cada uma das raízes de p_0; tomando as vizinhanças correspondentes a cada raiz suficientemente pequenas para não se intersetarem, o que implica tomar $|\lambda|$ suficientemente pequeno, garantimos que as soluções correspondentes a diferentes raízes são distintas, ou seja, que a equação $p_\lambda(x) = 0$ possui pelo menos n soluções distintas. Mas como p_λ é um polinómio não pode ter mais que n raízes distintas. (Para ver que este resultado não é verdade no caso de raízes múltiplas, considere-se o exemplo $p_\lambda(x) = x^2 + \lambda$.)