1 Teorema da Função Implícita - 1

Esta nota apresenta a demonstração de que um conjunto de nível de uma função de classe C^1 em que o gradiente de f não se anule é localmente, ou seja, na vizinhança de cada ponto, o gráfico de uma função também de classe C^1.
Este resultado é um caso particular de um outro mais geral, o Teorema da Função Implícita, que será discutido mais à frente no curso.

Mais precisamente, se $f(a) = c$ e a coordenada i do gradiente de f no ponto a é diferente de zero, existe uma vizinhança U de a tal que em U o conjunto de nível c de f é o gráfico de g que define x_i como função das outras corrdenadas.

Exemplo 1.1 *Em $\mathbb{R}^3$, a esfera de raio 1 centrada na origem é conjunto de nível de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; temos*

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z);$$

se (x, y, z) é um ponto da esfera em que, por exemplo, $z > 0$, a esfera é, na vizinhança desse ponto, o gráfico de

$$z = g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Na vizinhança de $(-1, 0, 0)$ a esfera é o gráfico de

$$x = g(y, z) = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}.$$

Para simplificar a notação, vamos supôr que

$$f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$

designando a última coordenada dos pontos de modo diferente: $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $(x, y) = (x_1, \cdots, x_n, y)$.

Proposição 1.2 *Seja*

$$f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$

de classe C^1, $(a, b) = (a_1, \cdots, a_n, b) \in U$, $f(a, b) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Então existem

uma vizinhança V de a em $\mathbb{R}^n$,

um intervalo $J = [b - \delta, b + \delta]$,

uma função $g : V \to J$ de classe C^1

tais que a intersecção do conjunto de nível c de f com $V \times J$ é o gráfico de g (em particular, $g(a) = b$). Além disso

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

o que implica que g tem derivadas parciais contínuas.

Demonstração 1.3 *Suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0$ (o caso < 0 é idêntico); como esta derivada parcial é contínua, podemos escolher o intervalo J de modo a que a função $f(a, t)$, com $t \in J$ seja estritamente crescente e portanto $f(a, b - \delta) < c < f(a, b + \delta)$. De facto, usando também a continuidade de f, vamos escolher V e J de modo a que*

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$ *para todo o* $(x,y) \in V \times J$,

$f(x, b-\delta) < c < f(x, b+\delta)$, *para todo o* $x \in V$.

A primeira conclusão é que, pelo Teorema do Valor Intermédio, para cada $x \in V$ *existe um único* $y \in J$ *tal que* $f(x,y) = c$*; definimos então* $g(x) = y$.
Vamos primeiro verificar que $g(x)$ *é contínua num ponto qualquer* $x \in V$*: seja* x_k *uma sucessão convergente para* x*; a sucessão* $g(x_k)$ *tem subsucessões convergentes, uma vez que* $g(x_k) \in J$*, um intervalo compacto. mas para qualquer dessas subsucessões temos* $f(x_{k_i}, g(x_{k_i})) = c$*, e portanto, por continuidade*

$$c = \lim f(x_{k_i}, g(x_{k_i})) = f(\lim x_{k_i}, \lim g(x_{k_i})) = f(x, g(x)),$$

logo $\lim g(x_{k_i}) = g(x)$*, uma vez que* $g(x)$ *é o único ponto* $y \in J$ *tal que* $f(x,y) = c$*; isto implica que* g *é de facto contínua no ponto* x.

Verificamos finalmente a fórmula para as derivadas parciais de g*: fixamos um ponto* $x \in V$ *e* $te_i = (0, \cdots, 0, t, 0, \cdots, 0)$ *um vector com coordenada* i *como a única não nula.*
Seja $u = g(x+te_i) - g(x)$*; temos então um vector* $v = (te_i, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *e*

$$0 = f(x+te_i, g(x+te_i)) - f(x, g(x)) = f(x+te_i, g(x)+u) - f(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial v}((x, g(x)+sv)$$

para algum $0 < s < 1$ *(que depende de* t*, claro) pelo Teorema do Valor Médio; como* f *é* C^1,

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ste_i, g(x)+)t + \frac{\partial f}{\partial y}(x+ste_i, g(x)+su)u.$$

e portanto

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x+te_i) - g(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{v}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

uma vez que as derivadas parciais de f *são contínuas e* $\lim_{t\to 0}(x+ste_i, g(x)+su) = (x, g(x))$.

A função g designa-se função implícita por a sua existência estar determinada implicitamente pela equação $f(x,y) = c$. Ao contrário do que se passa no exemplo apresentado atrás, em geral não é possível, ou é muito difícil, determinar explicitamente a expressão analítica dessa função.

Exemplo 1.4 *Considere-se a função*

$$f(x,y) = x^4 - x^2y + xy^2 + y^5;$$

Temos $f(1,1) = 2$*; como*

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2xy + y^2, -x^2 + 2xy + 5y^4)$$

e portanto $\nabla f(1,1) = (3,6)$*, concluímos que o conjunto solução da equação* $f(x,y) = 2$*, na vizinhança do ponto* $(1,1)$ *é o gráfico de uma função* $y = g(x)$ *(ou* $x = g(y)$*), de que não conhecemos a expressão analítica. No entanto sabemos que* $g'(1) = -1/2$.

A fórmula para as derivadas parciais de g implica que, se f fô rde casse C^k, ou seja, se tiver derivadas parciais de ordem $j \leq k$, contínuas, também g é de classe C^k. A expressão para as derivadas de ordem superior de g, em função das de f obtém-se usando a regra de derivação da função composta.
Por exemplo, se f é de classe C^2,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \right) =$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x, g(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x_i}(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\right) \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x)) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y}(x, g(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, g(x)) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^2}$$

Exemplo 1.5 *Consideramos de novo o exemplo anterior. A função $g(x)$ tem derivada*

$$g'(x) = -\frac{4x^3 - 2xy + y^2}{-x^2 + 2xy + 5y^4};$$

podemos calcular $g''(1)$, derivando esta função, recordando que $y = g(x)$:

$$g''(x) = -\frac{(12x^2 - (2y + 2xg'(x)) + 2yg'(x))(-x^2 + 2xy + 5y^4) - (4x^3 - 2xy + y^2)(-2x + 2y + 2xg'(x) + 20y^3 g'(x))}{(-x^2 + 2xy + 5y^4)^2}$$

Substituindo $x = y = 1$ e $g'(1) = -1/2$,

$$g''(1) = -\frac{31}{12}$$