Aula de Problemas - 14-15/02

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < r\}$ é a bola aberta de raio r centrada em $x \in \mathbb{R}^n$, para a norma euclideana $\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

Dado um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$,

- U é limitado se existe $r > 0$ tal que $U \subset B(0,r)$;

- x é ponto interior de U ($x \in Int(U)$) se existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$;

- x é ponto de fronteira de U ($x \in Fr(U)$) se, para qualquer $r > 0$,

$$B(x,r) \cap U \neq \emptyset \text{ e } B(x,r) \cap \mathbb{R}^n \setminus U \neq \emptyset.$$

- x é ponto exterior de U ($x \in Ext(U)$) se $x \in Int(\mathbb{R}^n \setminus U)$.

- U é aberto se $U = Int(U)$;

- U é fechado se $\mathbb{R}^n \setminus U$ é aberto, ou seja, se $Fr(U) \subset U$.

Para cada um dos conjuntos seguintes, identificar o interior e a fronteira. Determinar se o conjunto é limitado, aberto, fechado.

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy < 1\}$;

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{1}{x^2+4y^2}\}$;

c) $C = \{(\arctan(t) + \pi/2)(\cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$;

d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 - y^2 = z < 1\}$;

e) $E = \{(\cos(t), \sin(t), \cos(2t)) : t \in \mathbb{R}\}$;

f) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y < z \leq 2 - x^2 - y^2\}$.