

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v1 - 30/03/2026 - 19h - LEAer

Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

1. Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 2 - x^2\}$ e f a função definida em A por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \operatorname{sen}(x)}{2|\operatorname{sen}(x)| + y^2} & \text{se } (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

Seja D o conjunto de pontos em que a função f é diferenciável.

[2,0]

- a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

Resolução:

Pelas propriedades das funções contínuas, f é contínua em $A \setminus \{(0, 0)\}$.

Sendo

$$|f(x, y)| = \frac{|x||y||\operatorname{sen}(x)|}{2|\operatorname{sen}(x)| + y^2} \leq |x||y|,$$

conclui-se que f é contínua na origem, ou seja, é contínua em A .

[2,0]

- b) Calcule, caso existam, as derivadas parciais da função f na origem.

Resolução:

Sendo $f(t, 0) = f(0, t) = f(0, 0) = 0$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

[4,0]

- c) Determine o interior e a fronteira do conjunto D .

Resolução:

Pelas propriedades das funções diferenciáveis, f é diferenciável em $A \setminus \{(0, 0)\}$.

Dado que f e suas derivadas parciais são nulas na origem e

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq |x|,$$

conclui-se que f é diferenciável na origem e, portanto, em A .

Assim, sendo A aberto o seu interior é o próprio A . A fronteira de A é:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1, y \leq 2 - x^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -1, y = 2 - x^2\}.$$

[5,0]

2. Sejam $f(x, y) = (x \cos 2y, x \operatorname{sen} 2y)$ e $w(u, v) = uv - 3u$.

Sem determinar a função $w \circ f$, calcule o respectivo gradiente no ponto $(1, \pi/4)$.

Resolução:

Seja $z(x, y) = (w \circ f)(x, y)$. O gradiente de z é

$$\nabla z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

e a derivada de z é

$$\begin{aligned} Dz(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = Dw(f(x, y)) \cdot Df(x, y) \\ &= [v - 3 \quad u]_{(u,v)=f(x,y)} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2y & -2x \sin 2y \\ \sin 2y & 2x \cos 2y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tem-se $f(1, \pi/4) = (0, 1)$ e

$$Dz(1, \pi/4) = [-2 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 4].$$

Portanto o gradiente de $w \circ f$ no ponto $(1, \pi/4)$ é $(0, 4)$.

[4,0]

3. Considere a curva definida pela função

$$\gamma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine o número de pontos da curva em que a recta

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 0\},$$

é normal à curva.

Resolução:

A curva é

$$\gamma(t) = (t, t^2, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

O vector tangente é

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 0).$$

O plano normal à curva no ponto $\gamma(t)$ é o plano perpendicular a $\gamma'(t)$ que passa por $\gamma(t)$.

A recta

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z = 0\}$$

é o eixo Ox e tem vector diretor $v = (1, 0, 0)$. Para que o plano normal contenha essa recta, é necessário que o seu vector diretor seja paralelo ao plano normal, isto é, $\gamma'(t) \cdot v = 0$. Mas

$$(1, 2t, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1 \neq 0,$$

e portanto não existe nenhum ponto da curva com a propriedade pedida.

[3,0]

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(0) = 0$ e

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que f é constante em cada semi-recta $\{tx : t \geq 0\}$. Conclua que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Resolução:

Fixe-se $x \in \mathbb{R}^n$. Consideremos a função

$$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(tx).$$

Como f é de classe C^1 , a função φ é diferenciável. Pela regra da cadeia,

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(tx), x \rangle.$$

Aplicando a hipótese dada,

$$\langle \nabla f(y), y \rangle = 0 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}^n,$$

ao ponto $y = tx$, obtemos

$$\langle \nabla f(tx), tx \rangle = 0.$$

Para cada $t > 0$, temos então

$$t \langle \nabla f(tx), x \rangle = 0,$$

e, portanto,

$$\langle \nabla f(tx), x \rangle = 0.$$

Logo,

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0.$$

Daqui concluímos que φ é constante em $(0, +\infty)$, e por continuidade também em $[0, +\infty)$. Assim, f é constante em cada semi-recta $\{tx : t \geq 0\}$. Em particular, para $t = 1$, temos

$$f(x) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(0).$$

Como $f(0) = 0$, segue que

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$