

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v1 - 27/03/2026 - 20h

Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

1. Sejam $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 2\}$ e f a função definida em A por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} & \text{se } (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

Seja D o conjunto de pontos em que a função f é diferenciável.

[2,0]

- a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

Resolução:

Pelas propriedades das funções contínuas, f é contínua nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$. Nos restantes pontos de D tem-se

$$|f(x, y)| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \leq |x| \frac{|\sin(x^2)|}{|x^2|}$$

e, portanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, ou seja, f é também contínua na origem.

Assim, f é contínua em A .

[2,0]

- b) Calcule, caso exista, a derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

Resolução:

Sendo $f(t, 0) = \frac{\sin(t^2)}{\sqrt{t^2}} = \frac{\sin(t^2)}{|t|}$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{t^2} \frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

e, portanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ não existe.

[4,0]

- c) Determine o interior e a fronteira do conjunto D .

Resolução:

Pela alínea anterior, f não é diferenciável na origem. Pelas propriedades das funções diferenciáveis, f é diferenciável em $D = A \setminus \{(0, 0)\}$.

Assim, o interior do conjunto D é $A \setminus \{(0, 0)\}$, ou seja, é o próprio conjunto D .

A fronteira do conjunto D é:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 1, y \leq 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y, y = 2\} \cup \{(0, 0)\}.$$

[5,0] 2. Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $g(t) = (2e^{3t} + t^2 - t + 2, 5e^{3t} + 3t - 1)$.

Dado que $D(f \circ g)(0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(4, 4) = -18$, calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 4)$.

Resolução:

Tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= D(f \circ g)(0) = Df(4, 4) \cdot Dg(0) \\ &= \begin{bmatrix} -18 & \frac{\partial f}{\partial y}(4, 4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6e^{3t} + 2t - 1 \\ 15e^{3t} + 3 \end{bmatrix}_{(0)} \\ &= \begin{bmatrix} -18 & \frac{\partial f}{\partial y}(4, 4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

segue-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(4, 4) = 30.$$

[4,0] 3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 6\}.$$

Determine os pontos de S em que a recta normal é paralela à recta de direcção $(1, 1, 2)$.

Resolução:

Defina

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6.$$

Então

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}.$$

A recta normal à superfície no ponto (x, y, z) tem direcção

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Queremos que essa recta normal seja paralela à recta de direcção $(1, 1, 2)$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 1, 2).$$

Assim,

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \frac{\lambda}{2}, \quad z = \lambda.$$

Substituindo na equação da superfície:

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda^2 = 6.$$

Então $\frac{3}{2}\lambda^2 = 6$. Logo, $\lambda^2 = 4$, e portanto $\lambda = \pm 2$. Se $\lambda = 2$, obtemos $(x, y, z) = (1, 1, 2)$. Se $\lambda = -2$, obtemos $(x, y, z) = (-1, -1, -2)$. Os pontos pedidos são $(1, 1, 2)$ e $(-1, -1, -2)$.

4. Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua na origem e $u \in \mathbb{R}^n$ um vector fixo. Defina

$$f(x) = \langle u, x \rangle g(x).$$

Mostre que f é diferenciável na origem e calcule $Df(0)$.

Resolução:

Definamos a aplicação linear

$$L(x) = g(0) \langle u, x \rangle.$$

Vamos mostrar que f é diferenciável na origem e que $Df(0) = L$.

Como

$$f(0) = \langle u, 0 \rangle g(0) = 0,$$

temos

$$f(x) - L(x) = \langle u, x \rangle (g(x) - g(0)).$$

Portanto,

$$|f(x) - L(x)| \leq |\langle u, x \rangle| |g(x) - g(0)|.$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$|\langle u, x \rangle| \leq \|u\| \|x\|.$$

Logo,

$$|f(x) - L(x)| \leq \|u\| \|x\| |g(x) - g(0)|.$$

Dividindo por $\|x\|$, para $x \neq 0$, obtemos

$$\frac{|f(x) - f(0) - L(x)|}{\|x\|} \leq \|u\| |g(x) - g(0)|.$$

Como g é contínua na origem,

$$|g(x) - g(0)| \rightarrow 0 \quad \text{quando } x \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - f(0) - L(x)|}{\|x\|} = 0.$$

Concluimos que f é diferenciável na origem e

$$Df(0) = L.$$

Assim,

$$Df(0)(h) = g(0) \langle u, h \rangle.$$

Identificando a derivada com o vector linha correspondente,

$$Df(0) = g(0) u.$$