

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v1 - 27/03/2026 - 18h

Duração: 45 minutos

Resolução abreviada

1. Sejam $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$ e f a função definida em D por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|}{x^2 + 3y^4} & \text{se } (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

Seja C o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

[3,0]

- a) Determine o conjunto C .

Resolução:

Pelas propriedades das funções contínuas, f é contínua nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$. Nos restantes pontos de D tem-se

$$|f(x, y)| = \frac{x^2|y|}{x^2 + 3y^4} \leq |y|$$

e, portanto, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, ou seja, f é também contínua na origem.

Assim, $C = D$.

[1,0]

- b) Determine o interior e a fronteira do conjunto C .

Resolução:

O interior de C é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}.$$

A fronteira de C é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}.$$

[2,0]

- c) Calcule, caso existam, as derivadas parciais de f em $(0, 0)$ e a derivada de f segundo o vector $(-1, 1)$ no ponto $(0, 0)$.

Resolução:

Sendo $f(t, 0) = f(0, t) = f(0, 0) = 0$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Sendo $f(-t, t) = \frac{|t|}{1 + 3t^2}$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-t, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t(1 + 3t^2)} = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

ou seja, $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ não existe.

[2,0]

d) Indique, justificando, se f é diferenciável na origem.

Resolução:

Se f fosse diferenciável na origem ter-se-ia

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = 0.$$

Mas, da alínea anterior, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ não existe e, portanto, f não é diferenciável na origem.

[5,0]

2. Sejam $f(x,y) = (x - 3y + 2xy, 2x + 5y - 3xy)$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funções diferenciáveis. Dado que

$$Dg(3,3) = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 5 \end{bmatrix},$$

calcule $D(g \circ f)(2,1)$.

Resolução:

Tem-se $f(2,1) = (3,3)$. Logo

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(2,1) &= D(g)(3,3) \cdot Df(2,1) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+2y & -3+2x \\ 2-3y & 5-3y \end{bmatrix} \Big|_{(2,1)} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 20 \\ 16 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[4,0]

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}.$$

Determine os pontos de S em que o plano tangente é paralelo ao plano

$$x + y + z = 0.$$

Resolução:

Defina

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3.$$

Então

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}.$$

O plano tangente a S no ponto (x,y,z) tem vector normal

$$\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z).$$

Queremos que o plano tangente seja paralelo ao plano

$$x + y + z = 0,$$

cujo vector normal é $(1,1,1)$. Logo, deve existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 1, 1).$$

Portanto,

$$x = y = z = \frac{\lambda}{2}.$$

Substituindo em $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, obtemos $3x^2 = 3$, isto é, $x^2 = 1$. Assim, $x = \pm 1$. Como $x = y = z$, os pontos pedidos são $(1, 1, 1)$ e $(-1, -1, -1)$.

[3,0]

4. Sejam $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas na origem e defina

$$f(x, y) = x g(x, y) + y h(x, y).$$

Mostre que f é diferenciável na origem e calcule $Df(0, 0)$.

Resolução:

Como g e h são contínuas na origem, os valores $g(0, 0)$ e $h(0, 0)$ estão bem definidos. Definamos a aplicação linear

$$L(x, y) = g(0, 0) x + h(0, 0) y.$$

Vamos mostrar que

$$f(x, y) = f(0, 0) + L(x, y) + o(\|(x, y)\|).$$

Em primeiro lugar,

$$f(0, 0) = 0 \cdot g(0, 0) + 0 \cdot h(0, 0) = 0.$$

Além disso,

$$f(x, y) - L(x, y) = x(g(x, y) - g(0, 0)) + y(h(x, y) - h(0, 0)).$$

Logo,

$$|f(x, y) - L(x, y)| \leq |x| |g(x, y) - g(0, 0)| + |y| |h(x, y) - h(0, 0)|.$$

Como

$$|x| \leq \|(x, y)\| \quad \text{e} \quad |y| \leq \|(x, y)\|,$$

obtemos

$$|f(x, y) - L(x, y)| \leq \|(x, y)\| (|g(x, y) - g(0, 0)| + |h(x, y) - h(0, 0)|).$$

Dividindo por $\|(x, y)\|$, para $(x, y) \neq (0, 0)$, fica

$$\frac{|f(x, y) - L(x, y)|}{\|(x, y)\|} \leq |g(x, y) - g(0, 0)| + |h(x, y) - h(0, 0)|.$$

Fazendo $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, o segundo membro tende para 0, pela continuidade de g e h na origem. Portanto,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - L(x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Concluimos que f é diferenciável na origem e que

$$Df(0, 0) = L.$$

Assim,

$$Df(0, 0)(u, v) = g(0, 0) u + h(0, 0) v.$$

Em particular, identificando a derivada com a matriz linha,

$$Df(0, 0) = (g(0, 0), h(0, 0)).$$