

# Cálculo Diferencial e Integral II

MAP1-v1 - 25/03/2026 - 18h - LEC

Duração: 45 minutos

## Resolução abreviada

1. Sejam  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 1, |y| \leq 1\}$  e  $f$  a função definida em  $D$  por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 3y^2} & \text{se } (x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

Seja  $C$  o conjunto de pontos em que a função  $f$  é contínua.

[3,0]

- a) Determine o conjunto  $C$ .

### Resolução:

Pelas propriedades das funções contínuas,  $f$  é contínua nos pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Nos restantes pontos de  $D$  tem-se

$$|f(x, y)| = \frac{|x|y^2}{x^2 + 3y^2} \leq |x|$$

e, portanto,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ , ou seja,  $f$  é também contínua na origem.

Assim,  $C = D$ .

[1,0]

- b) Determine o interior e a fronteira do conjunto  $C$ .

### Resolução:

O interior de  $C$  é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 1, |y| < 1\}.$$

A fronteira de  $C$  é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1, |y| \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1, |y| = 1\}.$$

[4,0]

- c) Calcule, caso existam, as derivadas  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  em que  $v = (1, -1)$ .

### Resolução:

Sendo  $f(t, 0) = f(0, 0) = 0$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Sendo  $f(t, -t) = \frac{t^3}{4t^2} = \frac{t}{4}$ , tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, -t) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{4}.$$

[5,0]

2. Sejam  $f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}$ ,  $g(x, y) = (e^{x-y}, e^{xy})$ . Calcule  $D(f \circ g)(1, 0)$ .

**Resolução:**

Tem-se  $g(1, 0) = (e, 1)$  e

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(1, 0) &= Df(g(1, 0)) \cdot Dg(1, 0) \\ Df(e, 1) &= \left[ \frac{2u(u^2 - v^2) - 2u(u^2 + v^2)}{(u^2 - v^2)^2} \quad \frac{2v(u^2 - v^2) + 2v(u^2 + v^2)}{(u^2 - v^2)^2} \right] \Big|_{(e, 1)} \\ &= \left[ \frac{-4e}{(e^2 - 1)^2} \quad \frac{4e^2}{(e^2 - 1)^2} \right] \\ Dg(1, 0) &= \left[ \begin{array}{cc} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{array} \right] \Big|_{(1, 0)} = \begin{bmatrix} e & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D(f \circ g)(1, 0) &= \left[ \frac{-4e}{(e^2 - 1)^2} \quad \frac{4e^2}{(e^2 - 1)^2} \right] \cdot \begin{bmatrix} e & -e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[ \frac{-4e^2}{(e^2 - 1)^2} \quad \frac{8e^2}{(e^2 - 1)^2} \right] \end{aligned}$$

[4,0]

3. Considere a curva

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}.$$

Determine os pontos de  $C$  em que a recta tangente é perpendicular ao vector  $(1, 2)$ .

**Resolução:**

Seja  $F(x, y) = x^2 + y^2$ . Então a curva  $C$  é dada por  $F(x, y) = 9$ . Num ponto  $(x, y)$  da curva, um vector normal à curva é o gradiente

$$\nabla F(x, y) = (2x, 2y).$$

Como a recta tangente é perpendicular ao vector  $(1, 2)$ , isso significa que  $(1, 2)$  é um vector normal à curva nesse ponto. Logo, o vector normal  $(2x, 2y)$  tem de ser paralelo a  $(1, 2)$ , isto é,  $(2x, 2y) = \lambda(1, 2)$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Daqui obtemos

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad y = \lambda.$$

Como  $(x, y) \in C$ , este ponto tem de satisfazer  $x^2 + y^2 = 9$ . Substituindo:

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda^2 = 9,$$

o que implica  $\frac{5\lambda^2}{4} = 9$  e portanto  $\lambda = \pm \frac{6}{\sqrt{5}}$ . Assim,

$$x = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}, \quad y = \pm \frac{6}{\sqrt{5}},$$

com o mesmo sinal em ambas as coordenadas.

Portanto, os pontos procurados são

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right).$$

4. Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  contínua na origem. Defina

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} g(x, y), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que  $f$  é diferenciável na origem e calcule  $Df(0, 0)$ .

**Resolução:**

Vamos mostrar que  $f$  é diferenciável na origem e que

$$Df(0, 0) = 0.$$

Como  $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , basta provar que

$$\frac{|f(x, y)|}{\|(x, y)\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Para  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| |g(x, y)|.$$

Ora,

$$x^2 y^2 \leq (x^2 + y^2)^2,$$

pelo que

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2.$$

Logo,

$$|f(x, y)| \leq \|(x, y)\|^2 |g(x, y)|.$$

Como  $g$  é contínua na origem, existe uma vizinhança da origem onde  $g$  é limitada. Assim, existe  $M > 0$  tal que

$$|g(x, y)| \leq M$$

nessa vizinhança. Portanto,

$$|f(x, y)| \leq M \|(x, y)\|^2.$$

Dividindo por  $\|(x, y)\|$ , para  $(x, y) \neq (0, 0)$ , obtemos

$$\frac{|f(x, y)|}{\|(x, y)\|} \leq M \|(x, y)\|.$$

Fazendo  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , o segundo membro tende para 0. Logo,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{\|(x, y)\|} = 0.$$

Isto mostra que  $f$  é diferenciável na origem e que a derivada é a aplicação linear nula. Portanto,

$$Df(0, 0) = 0.$$