1 Derivadas parciais

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e $a \in D$.

A **derivada parcial** em ordem a x_i no ponto a é

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Este conceito generaliza-se: a derivada segundo um vector nãnulo v é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Verifica-se a igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial (cv)}(a) = c\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Se $\|v\| = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é a derivada direccional de f, e o seu valor é o declive no ponto $(a, f(a))$ da restrição de f a um segmento de recta com direcção (e sentido) v.

Se f e g têm ambas derivada segundo o vector v num ponto a, então

$\frac{\partial (f+g)}{\partial v}(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) + \frac{\partial g}{\partial v}(a)$

$\frac{\partial (fg)}{\partial v}(a) = g(a)\frac{\partial f}{\partial v}(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial v}(a)$

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Médio) *Se o domínio de f contém o segmento $\{a + tv : 0 \leq t \leq 1\}$ e existe $\frac{\partial f}{\partial v}(a + tv)$ para todo o $0 < t < 1$, então existe $0 < t_0 < 1$ tal que*

$$f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + t_0 v)$$

Em particular, se $f(a) = f(b)$, existe um ponto $c = a + t(b - a)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(c) = 0$ onde $v = b - a$.