

1 Funções Contínuas

Uma função $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua no ponto $a \in D$ se existe $\lim_{x \rightarrow a} F(x)$, que tem que ser necessariamente igual a $F(a)$.

F é contínua em D se for contínua em todos os pontos de D .

Se existir $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$ para algum $a \in Fr(D) \setminus D$, diz-se que F é **prolongável por continuidade** ao ponto a .

1.1 Propriedades das Funções contínuas

$F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ é contínua se e só se as suas componentes F_i , $1 \leq i \leq k$, o forem.

Se f e g são funções reais contínuas num mesmo domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ as funções $f+g$ e fg são também contínuas. Se f é contínua e $f(x) \neq 0$ em D , $1/f$ também é contínua.

Se está definida a composição das funções contínuas f e g então a composta $g \circ f$ é contínua.

$D \subset \mathbb{R}^n$ é **desconexo** se existirem conjuntos abertos disjuntos U e V tais que

$$D \subset U \cup V; D \cap U \neq \emptyset; D \cap V \neq \emptyset.$$

D é **conexo** se não for desconexo.

Se D é aberto, D é conexo se para quaisquer $x, y \in D$ existe uma função contínua

$$f : [0, 1] \rightarrow D \quad f(0) = x; f(1) = y$$

Teorema 1.1 (Teorema do Valor Intermédio) *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com D conexo.*

Se $f(x) = a$, $f(y) = b$ e $a < c < b$ então existe z tal que $f(z) = c$

Teorema 1.2 (Teorema de Weierstrass) *Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com D compacto, então f tem máximo e mínimo em D .*