1 Aula 2 - Limites de funções

1.1 Limites de funções

$F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ $F(x) = (F_1(x), \cdots, F_k(x))$

$\lim_{x\to a} F(x) = c$ se

$$\forall\delta\ \exists\varepsilon : x \in D \wedge \|x-a\| < \varepsilon \implies \|F(x)-c\| < \delta.$$

Com o mesmo argumento usado para sucessões, prova-se que $\lim_{x\to a} F(x) = c$ se e só se $\lim_{x\to a} F_i(x) = c_i$ $\forall 1 \le i \le k$.

F é contínua (num ponto) se e só se as suas componentes F_i o forem.

1.1.1 Propriedades dos limites

O limite da soma (ou do produto) de funções é igual à soma (ou produto) dos limites, se estes existirem.

Se a composição $G \circ F$ está definida e

$$\lim_{x\to a} F(x) = b, \qquad \lim_{y\to b} G(y) = c$$

então $\lim_{x\to a}(G \circ F)(x) = c$

1.1.2 funções reais de variável vectorial

$F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

limite **direccional** (ou parcial): $\lim_{x_1\to a_1} F(x_1, a_2, \cdots, a_n)$
(semelhante para as outras coordenadas)

Se $\lim_{x\to a} F(x) = c$ existe então os limites direccionais também existem e são iguais.

A recíproca não é verdadeira.

limite ao longo de uma linha: suponhamos que $\phi : I \subset \mathbb{R} \to D \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi(t_0) = a$;

Se $\lim_{x\to a} F(x) = c$ então $\lim_{t\to t_0} F \circ \phi(t) = c$.

$\lim_{x\to a} F(x) = c$ se e só se para qualquer sucessão $x_k \to a$, se verifica $\lim_{k\to+\infty} F(x_k) = c$.