

1 Os espaços \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n é um espaço vectorial:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

com um produto interno $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$,

que determina uma norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Fixado um sistema de coordenadas cartesianas, um vector $x \in \mathbb{R}^n$ identifica-se com um ponto no espaço n -dimensional; e dados dois pontos, a distância entre eles é dada por $\|x - y\|$.

A bola aberta de raio r e centro em x é $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$, ou seja, o conjunto dos pontos cuja distância a x é menor que r .

Dois propriedades importantes do produto interno e norma:

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$

Desigualdade triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Podemos comparar a norma de $x = (x_1, \dots, x_n)$ com o valor absoluto das suas componentes:

$$\max_i |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_i |x_i|$$

e portanto $|x_i| \leq \|x\|$ para qualquer $i \leq n$.

1.1 Sucessões em \mathbb{R}^n

Uma sucessão $x(k)$ de vectores é um vector de sucessões:

$$x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$$

$x(k)$ converge para $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que

$$k > k_0 \implies \|x(k) - a\| < \varepsilon$$

Nesse caso,

$$k > k_0 \implies |x_i(k) - a_i| < \varepsilon$$

Mas se cada componente $x_i(k)$ converge para a_i , então dado ε existe k_0 tal que

$$k > k_0 \implies |x_i(k) - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \forall i \implies \|x(k) - a\| < \varepsilon.$$

Ou seja: uma sucessão de vectores $x(k) \in \mathbb{R}^n$ converge para $a \in \mathbb{R}^n$ se e só se cada componente $x_i(k)$ converge para a_i .

Uma sucessão limitada tem subsucessões convergentes.

1.2 Subconjuntos de \mathbb{R}^n

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$,

x é ponto interior de U ($x \in \text{int}(U)$) se $\exists r > 0 : B_r(x) \subset U$;

x é ponto exterior de U ($x \in \text{ext}(U)$) se $\exists r > 0 : B_r(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$;

x é ponto de fronteira de U ($x \in \text{fr}(U)$) se não é interior nem exterior:
ou seja

$$\forall r > 0 \exists y \in U, z \in \mathbb{R}^n \setminus U : y \in B_r(x), z \in B_r(x)$$

U é

aberto, se $U = \text{int}(U)$;

fechado, se o seu complementar é aberto, ou seja, $\text{fr}(U) \subset U$;

limitado, se $\exists R > 0 : U \subset B_R(0)$;

compacto, se for fechado e limitado.

O fecho de U é a união de U com a sua fronteira: $\bar{U} = U \cup \text{fr}(U)$.

1.3 Subconjuntos de \mathbb{R}^n e funções: exemplos

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy < 1\}.$$

Se considerarmos a função

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy$$

U é a **imagem inversa**, por f , do intervalo $[0, 1[$:

$$f^{-1}([0, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in [0, 1]\}$$

$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = z\}$ é o **gráfico** da função

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^2 - y^2$$

e também a imagem inversa $G^{-1}(0)$ para $G(x, y, z) = x^2 - y^2 - z$.

$$C = \{(\cos(t), \sin(t), \cos(2t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

é a **imagem** da função

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(2t)).$$