Análise Matemática II

Exercícios IX

1 - Dadas as funções :

$$f(t) = (\ln(t^2+1), \sqrt{t}) \quad \text{e} \quad g(x,y) = ye^{-3x}$$

determine o domínio, o contradomínio e a expressão analítica da função $g \circ f$, e calcule o limite $\lim_{t\to 0} g \circ f(t)$. Repita o exercício com $f \circ g$.

2- Determine o domínio, o contradomínio e a expressão analítica da função $g \circ f$ onde

$$g(x,y) = \ln(xy) \quad \text{e} \quad f(u,v) = (u + e^v, v - u^2).$$

Calcule $\lim_{(u,v)\to(1,0)} g \circ f(u,v)$.

3 - Esboce os conjuntos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| + |y| \leq 3\}$$

Verifique se os conjuntos $A \setminus B$ e $B \setminus A$ são limitados, abertos, fechados ou conexos.

4 - Determine o domínio e o contradomínio das seguintes funções e verifique se são conjuntos limitados, abertos, fechados ou conexos:

$$f(x,y) = \tan \tfrac{x^2}{y} \qquad g(x,y) = \arccos \sqrt{\tfrac{x}{y}}$$

$$h(x,y) = x \arctan \tfrac{y}{x} \qquad j(x,y,z) = \tfrac{1}{xy+xz+yz}$$

5 - Verifique em que pontos é contínua a função

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{3x^3+2yz^2}{x^2+y^2+z^2} & x\neq y^2 \vee x\neq z^2\\ 2x+1 & x=y^2=z^2\neq 0\\ 0 & x=y=z=0\end{cases}$$

6 - Determine o domínio e o contradomínio da função

$$\varphi(x,y)=\int_{x+y^2}^{xy}\frac{e^t}{1-t}dt.$$

7 - Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x+y^2}$; $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{3x^2+2y^2}$; $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{2x^6+y^2}$;

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$; $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^3+y^2}$;

8 - Considere a função f definida por:

$$f:\left\{(x,y):y^2\neq x\wedge x>0\wedge y>0\right\}\to\mathbb{R}$$
$$f(x,y)=\frac{x^2y}{y^2-x}$$

a) Sendo g a função que exprime o valor de f em termos de coordenadas polares (isto é, $g(r,\theta)=f(x,y)$), determine, ou mostre que não existe, o limite:

$$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}g(r,\theta)$$

b) Obtenha as equações cartesianas das curvas de nível de f e tire conclusões sobre o contradomínio de f.

c) Determine, ou mostre que não existe, o limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$$