Análise Matemática II

Exercícios VIII

1 - Determine se os conjuntos seguintes são limitados, abertos ou fechados e quais os seus pontos interiores e pontos fronteiros.

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 2 \wedge x + y < 2\}$;

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x+1} > \frac{1}{y+1}\}$;

$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > (x^2 + z^2) \wedge |x| < 1 \wedge |z| < 1\}$;

$D = \{(n^{-1}, (-1)^n, n^{(-1)^n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

2 - a) Determine a equação da recta que passa pelos pontos $(3, 2)$ e $(5, 1)$ e da recta ortogonal a esta e que passa pela origem; use essas equações para calcular a distância da primeira recta à origem.

b) Determine a equação do conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cuja distância à recta $y = -1$ é igual à distância ao ponto $(2, 1)$.

c) Calcule o cosseno do ângulo definido por uma aresta e uma diagonal de um cubo.

d) Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(3, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ e $(3, 2, 1)$ e a distância do ponto $(1, 1, 1)$ a esse plano.

3 - Determine o domínio e a equação das curvas de nível das seguintes funções:

$f(x, y) = \sqrt{x+y}$, $\quad g(x, y) = \frac{1}{x^2y+y+2xy+3}$, $\quad h(x, y) = \ln(x + 5y)$

$j(x, y) = xy + \frac{1}{xy}$, $\quad l(x, y) = \frac{x^2+y}{x-y^2}$.

4 - Sejam u_n e v_n os termos gerais de duas sucessões com termos em $\mathbb{R}^m$. Supondo que u_n converge para o vector nulo e que v_n é limitada, prove que a sucessão $< u_n, v_n >$ (produto interno das duas

sucessões) converge para 0 em $\mathbb{R}$.

5 - Sejam u_n e v_n os termos gerais de duas sucessões com termos em $\mathbb{R}^m$. Supondo que $u_n \to a$ e que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem $\|u_n - v_n\| \leq \frac{1}{n}$, mostre que $v_n \to a$.